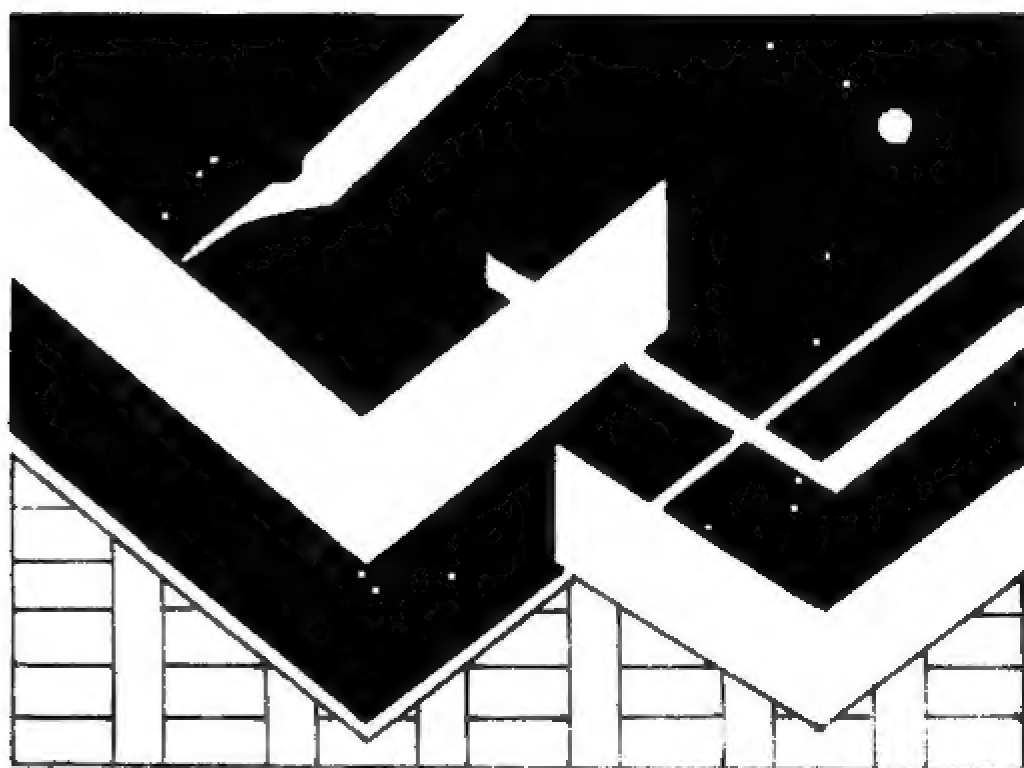
数学论文写作概论

于忠文　著



航空工业出版社

数学论文写作概论

于忠文 著

李师正 主审

1999

内 容 提 要

本书共分六章，首次将数学论文分为几种不同类型：数学教学研究论文、数学思想方法论文、数学应用论文、数学专题研究论文及学位论文。第一至五章论述了数学论文创作的有关理论和不同类型论文的选题、撰写方法、写作要求及其例文分析；第六章是在前五章的基础上，根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等文件精神，着重对数学专业本科生毕业论文写作进行了详细阐述，并注重实用。

本书可作为数学专业毕业论文写作课教材，或进行系列讲座，或课外阅读，也可供大、中学校教师、研究生、数学工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学论文写作概论/于忠文著．－北京：航空工业出版社，1999.7

ISBN 7-80134-452-9

Ⅰ．数…　Ⅱ．于…　Ⅲ．数学-论文-写作　Ⅳ．H152.2

中国版本图书馆 C[illegible]06005 号

航空工[illegible]出版社[illegible]

(北京市安[illegible]外小关东里 14 号　100029)

北京地质印刷厂印刷　　全国各地新华书店经售

1999 年 7 月第 1 版　　1999 年 7 月第 1 次印刷

开本：850×1168　1/32　　印张：8.625　　字数：220 千字

印数：1—4000　　定价：15.00 元

该书稿概述了数学论文写作的意义及其类型；对不同类型的数学论文内容的选择、写作，作了较为详细地论述；列举了一些较为典型的论文进行分析。它是我国第一部阐述数学论文写作的专著，有一定的理论价值和实用价值，可以出版。

建议作者注意收集有关同行专家、教师和读者的意见，以利今后再版时修改得更加完善。

中国数学会理事
教育部高校数学与力学教学指导委员会成员
北京航空航天大学教授 李心灿

1999年2月25日

序

科技论文是科技信息交流和推广的重要载体，它可以迅速快捷地反映最新的科研成果和动态。随着科技的发展，科技论文的写作更显重要。目前有关科技论文的撰写方面的著作已有问世。然而，作为基础科学重要领域之一的数学论文的写作方面的指导性著述，尚未见到。

数学论文不同于一般的科技论文，它一般不需要大量的实验、照片、图表，但更强调理论的严谨和逻辑的严密。另外，数学符号的繁杂更是特点之一，数学语言的正确使用并非一日之功，数学工作者、数学专业的大学生、研究生，在撰写数学论文时，常感到不知选择什么文章类型，在写作中又常因不知如何下笔而苦恼。

本书作者于忠文教授，对数学论文写作已有较深入的研究和探讨，本书旨在为数学论文的作者提供论文表述的基本概念、实用的方法和仿效的例文。书中从当代数学的发展出发，系统地论述了数学论文的选题途径、数学论文写作的思考方法、数学论文的一般形式、数学论文的写作要求，对数学论文的各种类型，即数学教学研究论文、数学思想方法论文、数学应用论文、数学专题研究论文和毕业论文等，详细地论述和阐明了具体撰写方法和总体要求。

书中附有的例文，取自公开发表的数学论文，并且从内容选择、题目推敲、创作新意、写作技法等方面加以分析，进一步揭示了创作规律。

本书的出版，对数学工作者和数学专业师生是一件十分有意义的事情，本书必将成为读者的良师益友，为提高数学论文的写作水平起到重要的作用。

李师正

于山东师范大学

1998 年 6 月

前　言

本书共分六章，首次将数学论文分为几种不同类型：数学教学研究论文、数学思想方法论文、数学应用论文、数学专题研究论文及学位论文。前五章论述了数学论文创作的有关理论和不同类型论文的选题、撰写方法、写作要求及其例文分析；第六章是在前五章的基础上，根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等文件精神，着重对数学专业本科生毕业论文写作进行了详细阐述，并注重实用。

本书可作为数学专业毕业论文写作课教材，讲授30~40课时，或进行系列讲座，或课外阅读，也可供大中学校教师、研究生、数学工作者参考。

本书得到北京航空航天大学李心灿教授审订，山东师范大学李师正教授主审并写了序；曲阜师范大学王长钰教授对本书的创作提出了中肯而宝贵的意见；采用了专家学者和毕业生的论文资料；本书的出版得到航空工业出版社邵箭编审的精心编辑及兄弟院校的支持，在此一并致以深切的谢意，并希望读者对书中的错误给予批评指正。

著　者

1998年6月

目　录

第一章　概　论

数学科学的研究成果，是由数学论文反映出来的。即使高新科学技术，本质上也是一种数学技术。而数学论文的写作却是一个非常严谨的创作过程，怎样熟练地掌握数学论文的写作技法，创作出高水平的数学论文，是一个值得我们深入探索和研究的课题。

第一节　当代数学发展的趋势

经过20世纪的众多数学家、科学家的努力，数学已经形成具有基础数学、应用数学和数学技术这几大部门的科学体系。人们对“高新技术的基础是应用科学，而应用科学的基础是数学”这句话的含义有了新的认识。数学的对象、特点、方法、地位和作用，数学的认识观、价值观、真理观，数学教育的目的、内容、方法、手段、体制和结构等，都随着社会的演变，随着生产力水平的提高和社会的进步而不断发展、完善并日益显现出本质特征，数学与其他科学并列叫数学科学。

一、当代数学

什么是数学？恩格斯说：“数学是研究现实中数量关系和空间形式的科学。”

一百多年后的今天，应该把“数量”和“空间”作广义的理解。数量不仅是实数，而且是向量、张量，甚至是有代数结构的抽象集合中的元；而空间也不只是三维空间，还有 n 维、无穷维以及具有某种结构的抽象空间。这样，恩格斯的名言，基本上包含了数学的主要内容。当然，还有的包含不进去，如数理逻辑等。

1. 数学的组成部分

数学大体上可分为三大部分：基础数学、应用数学和计算数学。

基础数学是数学中的核心，也是纯粹、抽象的部分。它大致由三个分支：分析、代数和几何组成。这三者相互交叉和渗透，从而产生解析几何、解析数论、代数几何等学科。另外，概率论、数理逻辑等也属于基础数学。

应用数学是研究现实中具体的数学问题，它采用基础数学的成果，同时又反过来从实际中提炼问题，探讨新思想、新方法，丰富了基础数学。

数学应用的领域虽无边际，但大致可分为三个方面：经济建设、科学与技术、军事与国防。

运筹学、控制论、数理统计、经济数学、生物数学等都属于应用数学。

计算数学偏重于计算。早期它致力于求出各种方程(代数方程、微分方程、积分方程等)的数值解。近40年以来，计算数学迅速发展，人们已把计算机作为理论、实验的科学方法引入科学界。

当然，上述三大部分中，有些学科还有子分支。

基础数学、应用数学、计算数学既有各自的特点，又相互联系。一个重大的数学问题，特别是从实际中提出的数学问题，都需要上述三种数学的内容和方法，建立数学模型。寻求解题方法，需要基础数学和应用数学，而使解题方法得以实现，则离不开计算数学。

2. 数学的新特点

通常所说的数学的特点是指内容的抽象性、应用的广泛性、推理的严谨性和结论的明确性。

由于高新科学技术的发展，数学已兼有科学与技术两种性质，所以当代数学还具有新的特点。即数学内部各分支间的相互渗透、数学与其他科学(如控制论)的相互渗透、电子计算机的计算。

由于相互渗透、计算机的引入而导致许多新问题和古老难题

的解决，促进了数学科学的发展。

二、发展趋势

数学的贡献在于对整个科学技术水平的推进与提高、对科技人才的培养、对促进经济繁荣、对人们的科学思维与文化素质教育等起着巨大的作用，这是其他科学不能全面比拟的。

1. 赶超国际先进水平

数学有一个历史发展过程。

新中国成立后，我国数学有了很大发展。早在1956年，建立和发展了微分方程、概率统计、计算数学、泛函分析、多复变函数论、运筹学、控制论等分支学科；到1965年，我国数学的基础研究已具有相当规模，在国际上有一定的地位。

1978年改革开放以来，国内学术风气非常活跃，陈景润、王元、潘承洞等数学家在数论，杨乐、张广厚等专家在函数论的优秀成果饮誉国际；大批老、中、青教授、博士、学者填补了若干重要的空白领域，硕果累累。数理逻辑、数论、代数、函数论、拓扑学、微分几何、微分方程、泛函分析、概率统计、控制论、运筹学、计算数学、代数数论、代数几何、非线性泛函分析、动力系统、整体微分几何、随机分析、机器证明、模糊数学等，都在近年内取得了达到国际先进水平的成果。

1992年9月，中国工业与应用数学学会召开了第二次会议，会上李大潜教授宣读了《努力发展中国的工业与应用数学》的报告。其中叙述了我国应用数学的新进展，即数学在经济建设、科学技术及军事与安全方面的应用。

例如，以数学家华罗庚为首的专家、教授在优选法、线性规划、非线性规划、最优控制等取得了惊人成就；以数学家苏步青为首的许多专家在几何造型方面的研究成果，成功地应用于飞机、船体、汽车的设计；中科院应用数学所研究员堵丁柱与美籍华人黄光明合作，证明了有关网络路线最短的一个猜想（Pollak－Gilbert 猜

想），在美国离散数学界引起轰动，被列为1989～1990年度美国离散数学界与理论计算机科学界的两项重大成果之一；陈景润的陈氏定理、侯振庭的侯氏定理等专家的创造性数学论文，覆盖着整个地球，为祖国争得荣誉。

上述许许多多惊人的成就，正如几年前在南开大学举行的21世纪数学展望会上，陈省身教授及与会的数学家们说的，我国完全有希望在21世纪前期成为数学大国、数学强国，数学应该率先赶超国际先进水平。

2. 发展的趋势

今后数学的发展，会比近十年更迅速，成就更巨大。

数学科学的子学科繁多，而且不断有新学科的诞生，每一个新学科的发展前途也是难以预料的。因此，对非线性数学、计算数学、计算机数学、离散数学的某些方面，以及数学物理、数学的其他边缘学科、概率统计、数学建模等都有待于开拓研究。

从目前情况看，线性数学比较成熟，非线性数学是重要的发展方向。引人注目的冲击波、孤立子、混沌现象、n体问题等，都是非线性的，不仅涉及面广，而且难度大。

除了非线性数学外，离散数学（涉及数论、抽象代数、数理逻辑、组合论、图论、博奕论、规划论）、概率论与数理统计、计算数学以及数学对生物学、经济学、语言学、管理学、控制论等的渗透和应用，都会有更大的发展。

与此同时，全国哲学社会科学青年社会科学基金项目·课题组撰写的《21世纪中国数学教育展望》论述了：让数学为大众所掌握，所利用。

我们深信，在数学专业改革、数学发展的过程中，从当代数学发展趋势上看，也许会出现新的大冷门，为未来的世界服务。

第二节　数学论文的含义及类型

什么是数学论文？论文的特点、写作意义及论文的类型、撰写的要求等问题，先前很少有人专门论及，本节加以探讨。

一、数学论文写作意义

1. 数学论文的含义

什么是论文？简言之，议论型诸文字即称论文。日本大辞典《广辞苑》对论文一词诠释是：

(1) 议论性文章，说理性文章，记述政治、措施的文章。

(2) 公布研究成果或结果的文章。

这里所说的数学论文，是诠释(2)所指的一种。由此，数学论文的含义可以说成：由数学内容构成的，以议论的方式表达自己的见解和说理的文章，称为数学论文。

数学论文是指描述数学科学中的研究成果的文章。如在数学教育、数学教学中的研究和探讨；在数学科研中探索数学规律；在数学应用中分析、论证等方面的文章，都是数学论文。

数学论文多为议论文也叫论说文，通常由论点、论据和论证过程组成。人们习惯上称这些为议论文的三要素。

数学论文是学术论文中的一类，它既是进行数学科研的一种手段，又是描述数学研究成果的一种工具。

2. 数学论文的特点及要求

数学论文属于议论文范畴，它与一般的议论文相比较，既有共同点，又有不同点。其共同点，都是直截了当地提出作者的见解、主张，阐述事理，揭示事物的本质和规律；在表述见解、主张时，都是运用概念、判断、推理的逻辑方法；它们的功能特征都是以理服人；它们的构成要素都有判断和证明；它们的篇章结构一般是三段式：绪论—本论—结论。

除了共同点以外，还有不同点，这些不同点，就构成了数学论文本身的特点。这主要是：

(1) 科学性

数学论文的科学性主要是指作者能用科学的思想方法、科学的研究方法进行论述，并得出科学的结论。主要体现在：

① 逻辑的严谨性

数学论文应按照逻辑严谨性的要求去写，不然就不成其数学论文了。一篇数学论文要无懈可击，要经得起推敲。就是说，概念要清楚，判断、立论、推理要正确，绝不能含糊，更不能臆造。

② 语言的简洁性

数学论文要求语言，以恰到好处的语言，准确地表达数学概念和逻辑推理；以简明的语言，表达出最精湛的数学结果，反映出丰富的数学内容。

例如，在推证的过程中，并不是每一步都要写出理论根据。数学论文不是教科书，它是给同行看的，推理过程以同行看懂为原则，证明步骤不需写得过细，允许有较大的跳跃。特别是常见的推理步骤、明显的推理过程、显然的理论根据，可以一笔带过；常用的概念、定理注明出处，尽力少作解释；不使用文学性的修饰和夸张性及含义模糊的语言。这样才能更好地体现出论文的特点。

③ 符号的广泛性

在数学论文中，广泛地使用数学符号和由符号组成的式子，形成了一套数学符号系统，它与自然语(汉语叙述)一样承担着储存和传递数学信息的职能，使用符号时必须规范、准确，国内外通用，不能臆造，否则就违背了论文的科学性。

(2) 创见性

创见性是衡量数学论文价值大小和水平高低的主要标准。因为科研的意义就在于创造、发现、创新。这就要求作者具有自己的独立见解，善于发现新问题、新规律、新方法。主要体现在：

① 开拓未知领域

具有创造性的数学论文，它要求作者在某个领域、某个方向或在某项专门技术上有明显的突破性的研究，从中发现别人没有发现或没有涉及的问题，取得了创造性的成果。

② 确立的课题新

具有创见性的数学论文是指作者利用已有的理论和方法解决了新的问题，取得新的研究成果；或将其他学科理论、方法引入本学科，解决了本学科中有价值的问题；或从不同角度上揭示出某种新规律、新方法。

(3) 实用性

数学论文是数学工作者深入研究的结晶，不仅具有一定的学术水平，还具有理论上的价值和实用上的价值。

高水平的数学论文既丰富了数学科学的理论，又能解决高新科学技术的问题，转化为社会生产力。

数学论文的实用性还在于理论上的价值，能够指导实践。使广大数学工作者进一步认识数学教育、数学教学的本质，把握其规律，为进一步提高教学质量起到"引导"、"帮助"、"提供"的作用。

3. 撰写数学论文的意义

国内外对数学论文写作十分重视，把论文写作作为"信息传递"的基础科学，列为大学必修课。其意义是不言而喻的，主要体现在以下几个方面：

(1) 交流、传播科研成果

早在1950年，美国就开始在理工科大学里开设科学技术写作课，并设立了博士、硕士学位，写学位论文；近期，美国社会学家约翰·奈斯比特在《大趋势》一书中，论及工业社会向信息社会过渡时指出：有五种最重要的事情应该牢记，其中之一就是"在文字密集的社会里，我们比以往更需要具备基本的读写技巧"；日本的一个研究生院院长在著作中写到：经过调查，许多理工科毕业生认为，对他们最有用的且需要加强的课程，"一是代数，二是物理，三是写作"。

我国也越来越重视理工科毕业生的毕业设计、毕业论文写作、学位论文写作，要求他们是文理兼优的"通才"。

高新技术的本质是数学技术，它是由数学论文反映出来的。通过论文的交流、传播，能反映出一个国家、一所学校的"水平"。

(2) 提高数学工作者自身素质和能力

数学论文的写作，对于数学工作者，是必须具备的最基本的能力之一，它是构成数学教育、数学教学和科研工作者合理的智能结构的必要条件。中国科学院前院长卢嘉锡曾说过："一个只会创造不会表达的人，不能算一个合格的科学工作者。"因此，作为数学工作者，应该把撰写数学论文视为必备的科研能力。在撰写数学论文的过程中，会使自己不断提高教学和科学能力。

(3) 培养教学、科研人才

数学工作者高水平的数学论文，在国内外引起人们的关注，解决了高新技术问题，为国争光，对指导、培养年轻一代发挥了巨大作用。

我国教育界不少工作在第一线的教师之所以能在全省或全国具有很高的知名度，这不但与他积极从事教育有强烈的事业心相关，也与他们发表的数学论文、取得的科研成果有一定关系。也可以这样说，他们结合教学、科研不断探索、创作，渗透着自己的心血，是自我培养、自我提高的过程，他们刻苦创作的精神，教育、激励着年轻一代，他们的论文丰富了基础数学内容，为提高教学质量，提高科研水平，培养人才做出贡献。

(4) 为职务晋升创造条件

在有关职称评定、职务晋升的文件中，明确规定了发表论文的数量和刊物级别，即科研成果是晋升的重要依据之一。所以撰写数学论文，应该是每一位数学工作者必须具备的一项基本功。

二、数学论文的类型

数学论文的范围是广泛的。

从发表形式上看，数学论文可以分为两大类：一类是内部交流的论文，一类是刊物上公开发表的论文。

公开发表的数学论文，按论文的内容、水平、价值、创作新意等因素进行分类，可分为以下几种类型：

数学教学研究论文；

数学思想方法论文；

数学应用论文；

数学专题研究论文；

数学学位论文；

研究简报。

学位论文包括大学本科生毕业论文(学士论文)、硕士论文、博士论文，统称学位论文。

上述分类，没有绝对界线。这样分类有益于论文的写作。

1．数学教学研究论文

数学教学研究论文，是教师在数学教育领域里，对数学教育的目的、课程设置、教学工作评价等方面的研究而写成的文章；是教师在数学教学领域里、改革教学内容、改进教学方法、数学理论研究等方面写成的文章。

这种类型的数学论文在教育工作者和教师、教学研究人员中普遍应用。

例如：

《面向21世纪的中国数学教育改革》(严士健)；

《当代国际数学教育目的及目标之比较》(范良火)；

《面向新世纪的高中数学课程》(丁尔升)；

《数学教育现代化问题》(吴文俊)；

《大众数学势在必行——兼论21世纪中国数学教育展望研究》(刘兼)等论文在国内外引起关注。

正如张孝达在《21世纪中国数学教育展望》书中的序言写到"80年代以来，各发达国家纷纷提出教育改革的报告、方针或方

案，总的来看，是面向21世纪，为适应高科技信息社会更加剧烈的世界市场竞争的需要。有的，如美国着重在提高劳动者的素质，有的，如日本强调个性化，培养一流的杰出人才。从整个教育来说，谁既能培养出合格的劳动者，又能培养出一流的杰出科学技术和经济管理人才，谁就能占有21世纪。这是我们考虑数学教育改革的一个首要的主导思想”。

还有各种数学刊物、大学学报上发表的论文：

《高师数学教育专业课程设置与教材建设》；

《积分运算中应注意的几个问题》；

《向量组线性相关性的几种证明方法》；

《构造概率模型的解题策略》；

《黎曼积分与勒贝格积分的本质区别》等都是教学研究论文。

这类论文对教育科研、教学研究、提高教育质量、培养人才有着重要的指导意义，有的具有相当高的学术价值、理论价值和应用价值，贬低或回避这类论文是不可取的。

2. 数学思想方法论文

数学思想方法论文，是一种研究数学思想方法，运用数学思想方法而写成的文章。

这种类型的数学论文，是在数学与哲学交叉的领域里，探讨、揭示数学的思想方法、思维过程，数学的发现、创新、发展规律。富有哲学意义，突出数学史，涉及的知识面广，具有理论化，更带有规律性，更具有理论指导性。

例如：

《数学观念的培养——数学思想方法大众化研究之一》（刘兼）；

《大众数学与中国古代数学思想》（张孝达）；

《强化整体意识，培养辩证思维》；

《浅谈加强数学思想方法教学的途径》；

《数学教学中应十分重视审美教育》；

《关于数学猜想的几个问题》。

上述论文都属于数学思想方法论文范畴。

3. 数学应用论文

数学应用论文，是指数学应用于实际，运用已掌握的数学知识分析、论证数学自身和解决实际问题而写成的文章。

数学应用论文，其内容突出数学应用于实际，其方法着重涉及数学模型方法。这样，数学应用论文可分为简单型的和复杂型的。前者就是作者运用已掌握的数学知识解决实际问题而写成论文；后者是作者运用已掌握的数学知识，对复杂的实际问题，通过建立数学模型而写成的论文。

这类论文的功能在于预测事物未来的状态和变化，借助数学模型事先推断某现象的存在，再通过观察、实验、上机计算、推证，去确认数学模型预见的正确性，这是现代科学的一种重要手段。

例如：

《一类条件极值问题的处理》；

《微积分在经济问题中的应用》；

《简单排队问题的数学模型》；

《一类灰色投入产出优化模型的设计与应用》。

上述论文都属于数学应用论文范畴。

4. 数学专题研究论文

数学专题研究论文，是作者对数学学科、边缘学科特定领域、特定问题进行研究，对创造性研究成果进行理论分析、论证的文章。

这种类型的数学论文的内容、观点、结论在所研究的领域内，具有一定的开拓性、创新性，发现有价值的新问题、新方法、新理论、新规律，具有创造性，具有一定的理论高度和应用价值。

例如：

《Hamilton 半群的结构》；

《完备向量中凸集分离定理》；

《关于移位自映射浑沌性的简化证明》。

上述论文都属于数学专题研究论文的范畴。

5. 学位论文

在我国"学位条例"中明确规定：

毕业论文(学士论文)是数学专业大学本科应届毕业生，运用所学知识写成的数学论文(详见第六章)。

硕士学位是一个独立学位，并具体提出了授予硕士学位的学术水平为：在本门学科上掌握坚实的基础理论和系统的专门知识；具有从事科学研究工作或担负专门技术工作的能力。硕士学位论文是在教师指导下，由研究生本人独立完成的数学论文。

博士生是我国人才培养中的最高层次，授予博士学位的学术水平为：在本门学科上掌握坚实宽广的基础理论和系统，深入的专门知识，具有独立从事科学研究工作的能力；在学科或专门技术上做出创造性的成果。博士学位论文就是博士生独立完成的有创造性成果的数学论文(本书对硕士论文、博士论文写作，从略)。

6. 研究简报

有些数学专题研究论文常以研究简报形式发表，它区别于其他体裁论文内容的鲜明特点是精、短、快。即内容精，篇幅短，发表周期快。文章只是反映作者从事某项学术研究的最主要的方法和结论，而摒弃了一般专题论文中对某个论点的详细论证过程，但作者的主要观点和独到的研究方法应一目了然。

第三节　数学论文创作的思考方法

数学论文的创作必须做到两点：第一要认真的搜集整理资料，积累知识，了解他人在该领域已有哪些发现、哪些成果，当前已研究到了何等程度；第二是要积极思考，根据自己研究的内容，在前人已有的观点中接受启发，灵活地运用科学的思维方法进行创造性的思考，以实现新的创造。

一、资料的搜集整理

材料是构成文章的基本要素之一，是论文创作的前提和基础。俗话说，“巧妇难为无米之炊”，没有材料，就写不成文章。

数学文献资料是人们从事数学教育和数学研究，从事生产斗争和科学实验所积累的智慧的结晶。善于搜集资料是撰写论文必备的基本能力之一。

1．资料的搜集

作者应平时留心各种文献资料，建立自己的资料库。

资料是多种多样的，诸如：

教科书、教学参考书、数学分支论著、数学刊物、大学学报、学术会议论文集、数学专业手册等。自备资料是有限的，还要充分利用图书馆的藏书。

要经常翻阅图书及期刊，它可以帮助你了解国内外数学教育、数学研究动态，获得新的信息。例如，学术界公认的定论性的学术观点及尚未定论的学术观点，这类材料可从专著、辞典、文摘、教科书、学报中查找。

通过查阅文献资料，可以获得前人积累的知识以及成功的经验和失败的教训，作为自己研究的依据，获得创作线索和灵感。

概念性材料，即定义、公式、定理、术语、数据、图表等，可以从综述性文章、辞典、专业手册中查找。在搜集资料、学习资料的过程中，获得创作启迪。

有的同志不善于搜集资料，除了课本，两手空空，教了一辈子书，虽说教书有经验，但很少发表论文。据了解，博士生的学位论文，要在某个学科或某个专题项目有重要的突破，有创造，要参考几十种，甚至上百种资料，属于自己突破的东西仅占10%左右。可见，占有大量资料确实是创作的前提和基础。

2．资料的阅读

有了资料，还要刻苦研读，才能读出新意，读出成绩，才能为己

所用。中国自然辩证法研究会副理事长、知名哲学家李庆臻教授还强调：读书科学地读，在读中用，在用中读，用要在创造中用。对于学术价值高、难度大的书和文章，先"正读"，尽量从正面领会，尽量吸收，继而"反读"，适当从反面理解，大胆扬弃。然后"合读"，弃其糟粕，吸其精华，营养自己，发展自己。

要拜人为师，也要拜书为师。拜人为师，目的解惑；拜书为师，目的也是解惑。首先弄明白问题是什么，然后去寻找解答问题的钥匙，不断积累知识、寻找方法，知识积累到一定程度，难开的锁也就打开了。

读书时，要精研细读，一方面深钻其理，另一方面细察其实，即不仅要弄清其内容实质，同时也还要研究其论证手段、论证方法，从多方面吸取营养，提高自己对问题的认识能力和表达能力。

读书时，要善于发现问题、提出问题，认真探索、研究，不放过每一个思维的火花。

3. 资料的整理

通过搜集、阅读、记录，所得的资料结合教学、科研的实际，对资料进行综合分析、比较、鉴别、作统一整理，为写作时引用和参考提供方便。

事实上，随着对资料进行概括、分析、整理、进行开拓性、创造性的思考，所要写的东西也就孕育产生了。

二、创造性的思维

创造性思维是人类高级的思维活动。它不仅能揭露事物的本质及内在联系，而且可以产生出新颖、独特的思想和成果。在数学论文创作过程中，直接依赖于数学思维能力的提高，借助灵感思维来实现。

1. 数学概括

数学概括是指在思想上把具有相同的本质特性的事物联系起来，把被研究对象的本质特性推广为范围更广的包含这个对象的

同类事物的本质特性。

数学概括，可分为完全性概括和非完全性概括，前者起到"整理"作用；而后者是由特殊到一般和未知的概括，具有产生新的认识的作用，具有创造性因素。

要写出好的文章，作者应具备形成数学概括能力和形成数学通则、通法的概括能力。

形成数学通则、通法的概括，即在思维活动中，依据实践材料和背景知识，对事物的属性进行分析，抽象出本质属性并上升为概念。

形成数学通则、通法的概括，即在思维活动中，注意数学、科研中数学知识的运用规律，对其中的一些普通的准则、方法进行总结、提炼，形成数学通则和通法。

2. 数学抽象

数学的特点之一，就是内容的抽象性。

根据某问题的特点，对某一数学对象进行属性、特性的抽象，具有这种能力称为发现属性能力；对资料系统进行各种关系的抽象，具有这种能力称为发现关系的能力；对两类不同材料中的共性进行抽象，具有这种能力称为发现相似性的能力。

要写出好文章，作者应具备上述抽象能力，掌握由具体到抽象、再由抽象到具体的思维的辩证方法。

3. 数学推理

推理就是根据判断间的关系，以一个或几个已有的判断，作出一个新的判断的思维形式。

一般分为两类：一类是推理的前提与结论之间有必然性联系的推理，即当前提为真时，结论必为真的推理，称为演绎推理；另一类是前提与结论之间有或然性联系的推理，即当前提为真时，结论只有或然为真的推理，称为归纳推理。

简言之，演绎是从一般到特殊的方法；归纳是特殊到一般的方法。即由资料，经过归纳产生出某个结论的方法。

在思维活动中，归纳以演绎为前导，演绎以归纳为基础，相互为前提，相互促进。

4. 数学化归

数学化归就是将待解决或未解决的问题，通过转化归结为一个已经能解决的问题；或归结为一个已知的，具有既定解决方法和程序的问题，求得原问题解决的思想方法。

结合教学、科研，思维的过程框图如图1-1所示。

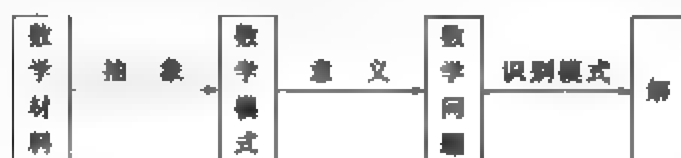


图 1-1

由此可见，要写出好文章，作者应具备数学化归能力，即数学转化能力、识别模式能力、数学变式能力，从而达到问题的解决。

5. 发散思维与收敛思维

发散思维是一种取得合理设想或猜想的思维形式，它包括联想、想像、模拟、类推和直观推理。

简言之，发散思维是抓到一个问题或围绕一个中心，以联想思维的方法，尽可能广泛地从头脑中探索与它相关的问题。

发散思维是一种开拓性、创新型的思维，其思维灵敏迅速，能在短时间内考虑较多的概念，能随机应变、触类旁通，能从新的角度、以新观点去认识问题、反映问题，对问题表现出超常的独特见解。

收敛思维是在发散思维之后，把联想思维得到的许多思想加以集中，收束，在它们彼此的相互作用中"创造"出一个新的、合理的逻辑思维。

数学创造性思维的过程，即逻辑思维与非逻辑思维的统一，发散思维与收敛思维的统一。在这样的交互作用下，在创造性思维的

前期，为了尽可能获得各种设想，需要进行发散思维，这时需要掌握较多的思维方式与构造技法；而在创造性思维的后期，由于设想已出现，就需要进行收敛思维加以筛选与验证。

著名数学专家徐利治教授指出：数学上的新思想、新概念、新方法往往来源于发散思维，而继之以严格的逻辑思维，即收敛思维。他概括出创造能力公式：

创造能力＝知识量×发散思维能力

由此可见，知识量越大，则联想、类比、想像的空间就越广，从而撰写的数学论文就越富有创造性。

6. 定量思维

当代科技的一个突出特点是定量化。

在许多现代化的设计和控制中，从一个大工程的战略计划、新产品的制作、成本的结算、施工、验收、直到储存、运输、销售和维修等，都必须十分精确地规定大小、方法、时间、速度等数字指标。因此，精确定量思维是对当代科学技术人员的要求。

所谓定量思维，是指从实际中提炼数学问题，抽象化为数学模型，求出此模型的解或近似解，然后回到现实中检验，必要时修改模型，使之更切合实际，最后编制解题的软件包，以便得到更广泛的应用。

由此可见，要写出好的论文，不仅应具备各种思维能力，而且在种种数量指标中，创作出最优化方案，使数学科学更好地解决高新科学技术问题，在这样的过程中，一定会创作出高水平的数学论文。

第四节　数学论文撰写的形式

为使数学论文规范化，提高论文质量，便于存储、传播、学术交流，作者应依据国家颁布的有关规定，结合刊物编辑的具体要求，确定数学论文撰写的形式。至于某篇论文采用何种形式，往往需要

根据论文所要表达的内容，以及作者本人的思维方式，灵活选择撰写的形式。

论文的内容和形式是辩证的统一，论文撰写的形式也可以是多种多样的。

一、论文的结构

为了表达文章的主题，把写作材料恰当地安排在适当的格式里，这种布局就是论文的一般形式（格式）。"布局"也就是论文的结构，即文章内部的组织、构造。

论文的结构是很重要的。人们常说：主题是文章的"灵魂"，材料是文章的"血肉"，结构是文章的"骨骼"。

数学论文的结构一般由下列部分组成：

标题

署名

摘要

关键词

引言

理论分析

材料和方法

实验结果的分析与比较

结果的讨论

结论

致谢

参考文献

附录

注释

前五项是论文前导部分的形式；中间五项是论文论证部分的形式；后四项是论文附属内容的形式。

上述论文的一般形式，能够较好地解释事物本质属性、内在联

系和客观规律，有着较强的逻辑顺序性。但是，在实际写作中，作者应遵从内容和形式辩证统一的法则，尽可能以较短的篇幅、精干的结构来表达研究过程和研究成果。

根据上述原则，数学论文的结构可简化为：

标题

署名

摘要

关键词

引言

正文

结论

参考文献

以及前四项的英语译文。

二、论文结构各项的要求

下面将对数学论文结构组成部分的各项的含义、撰写、编排的基本要求，注意事项逐一加以说明。

1. 标题

(1) 确定标题的意义

标题，又叫题目(或总标题，以区别于层次标题)，它是以恰当、简明的词组反映文章主要内容的逻辑组合。

标题是文章的前额与眼睛，是牵动全文神经的关键，是一篇论文的缩影，“提纲的提纲”，对论文内容具有重要的提示作用。好的标题，能显示出论文“水平”的层次，吸引读者，甚至被“文摘”。

(2) 确定标题的要求

① 准确得体

标题应能准确地表达论文的中心内容，恰如其分地反映研究的范围和达到的深度。不能使用笼统、泛指性很强的词语和华而不实的词藻。

常见的毛病是：面大、一般化、拔高等。

例如，标题：

《论数学教育的改革》，面大；

《数学课堂教学的几点体会》，一般化；

《对行列式计算技巧的研究》，拔高。

② 简短精练

标题应简明。使读者印象鲜明，便于记忆和引用。

中文标题一般以不超过 20 个字为宜，英文标题应与中文标题相吻合。

③ 选词准确

标题的文字要求很高，言简意明，必须符合语法、修辞和逻辑规则。应尽量避免使用不规范的缩略语、字符、代号和公式等。

2. 署名

署名是作者文责自负和拥有著作权的标志。作者的名字或课题组的名称与工作单位一起置于标题下方，署名一般不超过 6 人。

要正确处理个人署名、多作者署名间的关系，做到实事求是。

3. 摘要

(1) 摘要的含义和作用

摘要也叫内容提要。摘要是对论文的内容不加注释和评论的简短陈述，内容包括研究目的、方法、结果和结论等。其作用是便于读者阅读，为科技文献检索。

(2) 摘要分类

① 报道性摘要

报道性摘要即资料性摘要或情报性摘要。它用来报道论文作者的主要研究成果，向读者提供论文中全部创新内容和尽可能多的定量或定性的信息。

② 指示性摘要

指示性摘要即概述性摘要或简介性摘要。它只简要地介绍论文的论题，或者概括地表述研究的目的，使读者对论文的主要内容

有一个概括的了解。

(3) 摘要的写作要求

根据有关规定，摘要写作要求如下：

① 用第三人称来写

摘要作为一种文体，应具有独立而完整的结构，语意连贯，结构严密。摘要是完整的短文，可以独立使用。摘要只能用第三人称而不用其他人称来写。

② 摘要要规范

摘要中不含注释和评语，内容连贯，不分段落。并应尽可能采用专业术语，避免使用非专业语言，特别是政治口号之类，摘要一般不用图表。

③ 一般水平的数学论文，可以写指示性摘要，但多数刊物不要求写摘要。

摘要的篇幅因文而异，一般以几十个字到三百字为宜。

例如：

标题　完备向量格中的凸集分离定理

摘要　本文提出完备向量格中凸集分离的充要条件，由此分别推出凸规划 Kuhn—Tucker 定理及广义 Farkas 定理中的充要条件。

此摘要为报道性摘要。言简意明，完整统一。

标题　求概率的模型方法

摘要　本文针对概率论中概念抽象、习题难做、应用方法不易掌握等独特之处，运用概率模型的思想方法，揭示出求概率的规律。

此摘要为简介性摘要。

摘要作为论文的一个组成部分，列于作者署名与关键词之间。

4. 关键词

关键词是指从论文的正文、摘要中抽出的，并在表达论文的内容、主题等方面具有实际意义，起关键性作用的名词术语。一般每

篇论文的关键词3～8个。

关键词作为论文的一个组成部分，列于摘要段之后。

5. 引言

(1) 引言的含义和内容

论文的引言也叫绪论。也可以说，引言即文章的开头。

引言的内容包括研究的理由、目的和背景；理论依据、实验基础和研究方法；预期的结果及其地位、作用和意义，向读者交代研究的来龙去脉，对论文先有一个总体的了解。

(2) 引言的写作要求

① 言简意赅，突出重点

引言中，要根据研究课题的具体情况确定阐述重点，主要写好研究的理由、目的、方法和预期结果，言简意明。

② 开门见山，不绕圈子

文章的开头写法要开门见山，直截了当，一起笔就切题，扣题越紧越好，不要拐弯抹角，绕来绕去，令人费解。

③ 实事求是，少用套话

引言中的评价，要实事求是，切忌"国内先进水平"等用语；少用套话，不使用"水平有限"、"抛砖引玉"、"敬请读者批评指正"等词语。

引言不要与摘要雷同，成为摘要注释，并注意避免公式推导、方法介绍。

数学论文也可以不写"引言"二字，此时，往往用小段文字叙述代替引言的效用。

引言一般不编层次序号，作为论文的组成部分，列于关键词之后。

例如：

标题　非完整系统在随机初始条件下的响应

引言

科学和工程中随机过程的研究是动力学中的重要课题，并已

取得重要进展[1-2]，然而大多数研究还只限于完整力学系统。本文中研究具有随机初始条件的非完整系统响应的统计规律。

该文"引言"符合上述要求，用语不多，言简意明，读后对整篇文章有了大致而明确的了解。

再如：

标题　积分运算中应注意的几个问题

该文没有写"引言"二字，直截了当地写道：

本文指出在积分运算中易忽视的几个问题，并指出书[1]、[2]、[3]中几处错误。

开门见山，言简意明，既代替了"引言"，又是文章的好开头。

6. 理论分析

理论分析，也称基本原理。它包括论证的理论根据；对所作的假设与合理性进行论证；对于分析方法(特别是自己创新的部分)的说明等。

其要点是：假说、前提条件、分析对象、适用的理论、分析的方法、计算的过程等。

7. 材料和方法

这里着重指实验对象、实验材料的性质和特性；选取的方法和处理方法；实验的目的、效果等。

8. 实验结果的分析与比较

这里论文的价值所在，是论文的关键部分。

这一部分的特点是以图表等手段整理实验结果，分析结论的可靠性、再现性与普遍性，对实验结果与理论计算结果的差异进行分析等。

9. 结果的讨论

这一部分的特点是对结果作出解释，表明论文中对现有成果有所发展和深入的地方；指出自己的成果与他人研究成果的异同；讨论所研究的问题中尚未定论之处，提出新的研究方向和问题。

上述"理论分析"、"材料和方法"、"实验结果的分析与比较"、

"结果的讨论",一般归于正文的范畴。

10. 正文

(1) 正文写作要求

正文,即一篇论文的核心部分,在论文中占主要篇幅。对正文部分写作的总的要求是:

① 论点明确,论据充分,论证合理;

② 事实明确,数据准确,计算准确,语言准确;

③ 内容丰富,文字简练,避免重复、繁琐;

④ 条理清楚,逻辑性强,表达形式与内容相适应。

(2) 正文写作注意事项

① 层次标题

层次标题是指除论文的标题外的不同级的分标题。分标题应简短明确,不超过15个字为宜。

同一层的标题,应尽可能"排比",即词组结构相近,意义相关,语气一致。各层标题一律用阿拉伯数字连续编号;不同层次的数字之间用下圆点"."相隔,末位数字后面不加标点。

例如:"1"、"2.1"、"3.1.2"等。

各层次的序号均左顶格编排,后空一个字长接排标题;各层标题要醒目,其字体与非标题有明显的区别。

② 插图

图要精选,切忌与文字和表重复。一般要有图序和图题。一篇论文中,如果有2个以上的插图,图序应连续编号。图题简明确切,末尾不加句号,连同图号置于图下。图应精心设计与绘制,大小适中,并靠近相应的正文。曲线图纵横坐标须注"量、标准规定的符号、单位"。

③ 表

表一般有表序与表题。一篇论文中如果有2个以上表格,表序应连续编号,表题应简明确切,末尾不加句号,连同表号置于表的上方。表内一栏数字须上下对齐,表内不宜用"同上"、"同左"等类

似语。

④ 量和单位

使用各种量、单位和符号，要符合国家规定。量的符号一律用斜体。单位的符号采用国际符号，并一律用正体。图表中用符号表示数值的量和单位，一般用量与单位的比值表示，如 m/kg，一系列的同类量并列时，可在最末一个数值后标注单位，如 3、5、6kg。

⑤ 数字用法

凡是可以使用阿拉伯数字且很得体的地方，均用阿拉伯数字。公历、世纪、年代、年、月、日、时刻和各种记数与计量，均用阿拉伯数字。年份不简写，如 1998 年不写成 98 年，避免文中出现"今年"、"后年"等字样。日期可采用缩写形式，如 1998—03—18。而两个邻近的数字作为词组时，均用汉字数字，如七八天。

⑥ 外文字母的书写规则

外文字母须注意正斜体、大小写、黑白体和上下角标。

正体用于计量单位和用于构成十进位数的 SI 词头符号，数学公式中的运算符号和函数等。

⑦ 汉字和标点符号

文句要求通顺、精练，符合语法规则，而文中汉字一律使用规范的简化汉字，一般不使用已废除的繁体字。

标点符号的使用应符合"标准符号的用法"的规定。

并列的外文符号或数字，其间不用顿号。

11. 结论

结论是论文最终的、总体的总结，又称结束语、结语。它是从正文部分的全部内容出发，并涉及引言的部分内容，经过判断、归纳、推理等过程而得到的新的总观点。其内容要点是：

(1) 本研究结果说明了什么问题；

(2) 本研究结果解决了什么理论或实际问题；

(3) 本研究结果得出什么规律性的东西；

(4) 还有什么问题需要进一步研究、讨论。

结论的写法应准确、完整、明确、精练，结论应与摘要、引言相呼应。

事实上，高水平的论文写"结论"部分，多数论文不写"结论"二字，而是根据正文的逻辑推理，顺其自然地与摘要、引言相呼应而结尾。

12. 致谢

科研工作常常需要多方面的指导和帮助才能完成，因此，当科研成果以论文形式发表时，有时需要对他人劳动给予充分肯定，并郑重地以书面形式表示感谢。

致谢的言辞应该恳切，实事求是，恰如其分，而不应失之浮夸或单纯的客套。

13. 参考文献

为了反映论文的科学依据和作者尊重他人研究成果的严肃态度，以及向读者提供有关信息的出处，文后应列出参考文献。著录的参考文献是作者亲自阅读、摘引过的主要的，且发表在正式出版物上的文献。

参考文献的著录按论文中引用顺序排列，序号不加标点符号，后空一个字格。每条著录结尾处不加标点。

参考文献的著录按"著者/文献名称/出版事项"顺序排列。

下面各选一例，便于参考。

参考文献

[1] 周作领　转移自映射的案动性态．数学学报，1987，30(2)：284～288
[2] 王宁康编．分布参数控制系统．北京：科学出版社，1986.
[3] Jordan P C. Chemical Kinetics And Transport. Plenum Press, 1979; 214

14. 附录

有些材料编入文章主体，会有损于编排的条理性和逻辑性或有碍于文章结构的紧凑和突出主题，为使文章的完整，可将这些材

料编排于全文的末尾。

附录的序号用A,B,C,…系列,如附录A,附录B,…。附录中的公式、图、表的编号分别用(A1),(A2),…系列;图A1,图A2,…系列;表A1,A2,…系列。

不随文列出的注释,标注号应注在需要注释的词、词组或文句的上角。标注符号可用加半个圆括号的阿拉伯数字1),2),…或星号"*",注释内容应置于该页地脚,并用10个字长正线与正文隔开。

表的注释一般注于表的底线下,图的注释一般注于图题下;各条注释之间用";"隔开。

属于国家自然科学基金资助的项目,其论文应在首页的地脚注明基金资助的名称。

我们知道,内容和形式是辩证的统一体。内容在不断地发展,形式是为内容服务的,我们创作的数学论文,总是希望尽量以较短的篇幅,较少的项目反映出科研成果。因此,在实际写作中,论文的结构可以灵活简化为:

标题

署名

摘要

关键词

正文

结论

参考文献

第二章 数学教学研究论文

在第一章里，我们从当代数学发展的趋势出发，系统地论述了数学论文的写作意义、数学论文的类型、数学论文创作的思考方法、数学论文的结构及其要求。在此基础上，从本章开始，我们将对不同类型数学论文的写作技法，进行具体的分析、研究。

第一节 论文内容的选择

我们专访过不少老、中、青年教师，谈起写论文，常听到这样的议论：在中学、大学里教了几十年的书，总觉得没有什么写的，又没有什么创造和发明，写什么呢？

诚然，这是教师之谦。但是，也反映出教师们对数学论文写作的认识问题。

事实上，数学教学研究论文内容的选择有着广阔的天地，有许多问题需要我们深入探讨和研究。

一、数学教育改革

1. 遵循的原则

数学教学研究论文内容的选择，源于数学教育改革和数学教学研究。

在研究、探讨的过程中，作者必须以党和国家的教育方针、辩证唯物主义世界观为指导。

“教育必须为社会主义现代化服务，必须同生产劳动相结合，培养德、智、体全面发展的建设者和接班人”，党的教育方针提出了教育的目的、方法、途径和目标；“教育体制改革的根本目的是提高

民族素质，多出人才，出好人才"；教育要"面向现代化，面向世界，面向未来"；"教育要改革同社会主义现代化不相适应的教育思想、教育内容、教育方法"等，这都是撰写论文的指导思想，应遵循的原则。

2. 在矛盾中思考

在上述原则指导下，论文内容的选择，应在矛盾中思考。

数学科学在本世纪得到空前发展，特别是数学各学科、数学与其他学科之间的相互渗透空前加强；数学的应用不仅形成了一大批新的应用数学学科（如信息论、控制论、运筹学、应用概率统计、经济数学、金融数学……），而且结合计算机的应用，形成数学技术。数学不仅仍然发挥基础和应用基础的巨大作用，而且成为现代社会中不可替代的关键技术，成为综合国力的一个重要组成部分。

但是，在社会上多数人还不理解，忽视数学的巨大作用，对数学教育认识不足，重视不够。表现在：

(1) 高考的体制和社会压力，导致中学数学教育围绕高考转，似乎中学生学习数学是为了升大学，不愿升学的就不愿学习数学，这样，不论升学与否，学生的数学素质不能得到真正的培养；

(2) 进入大学数学专业的学生，常常显得并不具备能较好理解数学实质的素养；

(3) 大学非数学专业的学生进入专业以及参加工作后，缺乏应用数学解决问题的意识和能力；

(4) 数学抽象、难度大，如何达到数学大众化，等等。

从矛盾中，作者会发现问题，会认识到：要充分发挥数学在现代化建设中的作用，为国家民族的振兴和富强做出贡献，最根本的有效的办法是加强数学教育改革。

从现代科技、社会经济发展的需要与数学教育状况的矛盾中思考，那么数学教育改革就是一篇大文章。

3. 从新的角度研究数学教育改革

我们知道，数学教育是研究教育规律的科学，是数学与教育

学、心理学、逻辑学、哲学、数学思想方法论等多学科交叉的学问。我们已经取得了数学教育和改革的经验。但是，今后应当主要从科学教育的角度研究数学教育改革。改变以往就数学论数学教育的状况。即：

(1) 从一个新的角度——战略的高度和社会发展的角度来考察我国的：

① 数学教育的目标；

② 数学教育的课程体系；

③ 数学教育的教学内容；

④ 数学教育的教学基本方法。

(2) 从新的观点出发，检查过去，哪些是对的，哪些是不对的，如何按照新的观点加以充实、发扬和改革。

只要作者从新的角度出发，认真探索、刻苦钻研，新的认识、新的研究过程、新的结果就会孕育在其中了。

例如：

数学教育目的的研究；

数学教育思想的研究；

数学课程设置的研究；

数学教书育人的研究；

数学教育与提高国民素质的研究；

数学教育目标与教育评价的研究。

以上范围的内容，都是重要的研究课题。

这一类论文的要求是很高的，它不仅能反映数学教育的新思想、新观点、新方法，具有科学性和实用性，更重要的在于其较高的理论价值。有的论文，引起国内外的关注。

例如，已发表的论文：

《面向 21 世纪的中国数学教育改革》；

《面向新世纪的高中数学课》；

《关于数学教育目的问题的若干理论探讨》；

《数学教学要着眼于人的素质的提高》;

《高师数学教育专业的课程设置与教材建设》等论文,就很好地体现了这一点。

二、数学教学研究

随着现代数学的发展及数学教育改革的深化,必然给数学教学研究带来新的研究课题。因此,论文内容的选择范围也是十分广阔的。

1. 揭示教育、教学规律

所谓教育规律,可以概括为:按照教育目的和培养目标进行管理;按照认识事物的规律进行教学;按照学生的年龄和个性特点进行教育。

教学规律,我国的学者提出了四条:

(1) 教学受社会发展、人类认识活动和青少年身心发展的制约的规律;

(2) 教与学统一,教师的主导作用和学生的自觉性、主动性相结合的规律;

(3) 教学与教育、占有知识和发展能力的统一及相互促进的规律;

(4) 教学过程中各种对立点之间和工作环节之间组成完整序列和协调统一的规律。

关于上述规律,是作者,特别是广大教师首先必须正确认识和把握这些规律,这是论文内容选择的依据,撰写教学研究论文要遵循这些规律,体现这些规律。同时,还要结合现代数学的特点(数学内部各分支间相互渗透、数学与其他科学相互渗透、计算机的应用),进一步探索,揭示新规律。

2. 教材内容的研究

我国现行的大、中学校数学教材,大都是从前苏联50年代的教材演化而来,体系和内容处理手法没有随科学技术和社会发展

而来一个大的改革，主要做了一些增删且主要是删减工作。因此，随着高新科技和社会经济的发展，教材内容、体系的具体改革势在必行，是一项细致、艰苦而富有创造性的工作。

（1）教育教学基本要求

1994年国家教委印发了《普通高等师范学校数学教育专业（本科）教育教学基本要求》，它是在总结我国高中阶段数学教育师资培养的历史经验、分析目前高中阶段数学教育的实际状况、预测本世纪末至下世纪初，高中阶段数学教育改革需求的基础上，为使高师本科数学教育专业毕业生形成应具备的知识结构和能力结构而设计的重大研究课题。

1）三个认知层次的含义

在数学教育学科知识与能力方面的基本要求中，按照“掌握”、“理解”、“了解”三个基本认知层次列举出必备的知识要素和能力要素。

粗略地说，三个认知层次的含义是：

① 了解

了解是关于认知对象的比较概略的整体性的认识。它的内容是，认识和把握认知对象的结构框架及邻缘关系；它的任务是，扩展知能储备，开阔科学视野。这是一种初级的认知层次。

② 理解

理解是关于认知对象的比较深入的本质性的认识。它的内容是，在“了解”层次的基础上，认识认知对象的结构细部及各部间的内在联系，把握来龙去脉。它的任务是弄通基本理论、领会基本知识和形成基本技能。这是一种基本的认知层次。

③ 掌握

掌握是关于认知对象的比较完整的综合性的认识。它的内容是，在“理解”层次的基础上，把握在不同条件下认知对象结构的分解、变换、组合，以及由此变化而产生的新的认知因素，并能自觉运用这些变化去达到新的认识目的。这一认知层次的任务是，形成运

用"三基"解决某些相关问题的知能储备。这是一种高级的认知层次。

有时,可使用不同的程度副词将一个基本认知层次再分成几个小的层次。例如:

初步了解、深入理解,熟练掌握等。

2）教材内容的基本要求

数学教育学科知识与能力方面的基本要求是,将整体教材内容归纳为五类并列出具体目录,标出认知层次。其中目录为:

分析类课程的基本要求;

代数类课程的基本要求;

几何类课程的基本要求;

应用数学课程的基本要求;

数学教育类课程的基本要求。

在上述"基本要求"的指导下,如何确定每门课程的内容和结构;如何体现高师数学教育的特点;如何搞好教材建设等许多具体问题都是论文内容选择广阔领域。

例如:

《面向中学改革师范院校数学专业课程设置》;

《高师数学教育专业(本科)毕业生应具有的知识结构和能力结构》;

《高师数学教育专业课程设置构想》等高水平的论文,以及《21世纪中国数学教育展望》、《数学教育学》等著作,都充分体现了这一点。

3. 教学方法的研究

数学教学改革的关键是教学思想的变革。

(1) 揭示启发式的内涵

数十年来,课堂教学实践证明了,启发式教学思想是正确的,启发式教学方法是行之有效的。

数学教学应确立启发式的教学思想,因为启发式的思想、方法

贯穿于教学过程的始终，其核心是把教学过程看成是一种特殊的认识过程，视学生为教学活动的主体，教师根据教学目的、学生的学习规律和知识的内部联系安排教学过程，充分调动学生的思维和学习的自觉性、积极性，引导他们生动活泼地学习，融会贯通地掌握知识，形成能力，发展智力。

事实上，每一位老师在课堂教学中，都在自觉或不自觉地运用启发式教学方法进行教学。

但是，启发式的教学思想理论体系，启发式内部的规律，在什么地方启发，启发什么，怎样启发等理论研究和启发式教学方法的研究有待解决，这都是论文内容选择领域。例如：

《略论启发式数学教学的基本要求》等论文说明了这一点。

(2) 加强辅助教学手段

在启发式教学思想的指导下，在课堂教学过程中，加强辅助教学手段，即使用教学仪器，特别是电教、计算机等教学手段都是十分必要的。为什么叫辅助教学？这是因为课堂教学思想是启发式思想，实行启发式教学方法，引入教学辅助工具(CAI)等正是为了启发在点子上，更好地达到教学目的。正如有的老师在总结中体会到：

① CAI 利于学生的主体参与和因材施教；

② 有助于某些数学思想方法的渗透；

③ 有助于辅助理解某些抽象的数学概念，展现知识的形成过程。

4. 教学内容的研究

5. 数学知识纵横谈

例如：

《积分运算中应注意的几个问题》；

《一致收敛序列与广义积分》；

《一类特殊的线性变换》；

《关于多项式最大公因式矩阵求法的补充》；

《求概率的模型方法》等许多类似论文都是4、5谈及的范围，都需要作者深入探索，各抒己见，写出高水平的数学教学研究论文。

第二节　论文的写作

上一节讲了，教学研究论文内容的选择、题目的确定，是作者结合教育、教学实际，从大家熟知的各科教材内容提炼出来的。这类论文对教育科研、提高教学质量、培养年轻一代都有指导意义。

写一篇好的数学教学研究论文不是一件容易的事。因此，本节对教学研究论文的结构、特点、写作，进行具体分析、研究。

一、简单型论文写作

简单型数学教学研究论文，结构简单，短小精悍，"一事一议"，多为常见（简单型是文章格式简单，不是内容简单）。

1．论文的结构及特点

简单型教学研究论文的结构，通常包括：

标题

署名

开头

正文

结尾

参考文献

再醒目些，如图2-1所示。

署名置于标题下面，参考文献附在结尾之后。

这种简单的论文结构，是由论文内容确定的，其特点是：

（1）能正确揭示出问题的规律和内在联系，突出了"提出问题—分析问题—解决问题"的程序；

（2）能集中突出文章的"主题"；

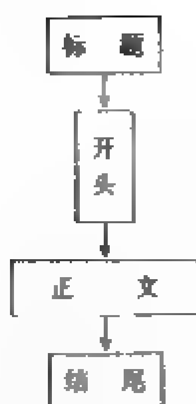


图 2-1

(3) 较易适应不同体裁的写作特点；

(4) 严谨自然，完整统一。

例如：

《求 A^n 及其应用》；

《"矩阵特征多项式的一种求法"的一个注记》等论文，体现了上述特点。

2．论文的写作要求

简单型数学教学研究论文写作要求及注意事项如下：

(1) 标题

此类论文的标题确定原则与第一章里讲的是一致的。但是，这里还要体现出"论文"属于简单型的特点，做到贴切，有新意。

例文 1《"矩阵特征多项式的一种求法"的一个注记》，作者的锤炼，贵在"一个注记"上。

(2) 开头

万事开头难。简单型论文的开头写法，更应该强调"开门见山"的写法。

例文 1 的作者直截了当切入正文。恰到好处，抓住了问题的内在脉络。有时"空白也是开头"。

开头切忌离题太远，陈词滥调，啰里啰嗦。

(3) 正文

正文是论文的主体，通常按照人们认识的规律与知识结构相吻合的原则安排写作层次。

一般采用：

直线推论，即提出一个论点后，一步一步深入，一层一层展开论述，由一点到另一点，遵循一个逻辑线索直线移动。

并列分论，即把从属于基本论点的几个下位论点并列起来，一个个分别加以论述。如图2-2所示。

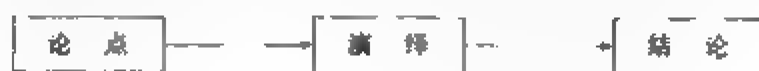


图2-2

提出问题——→分析问题——→解决问题

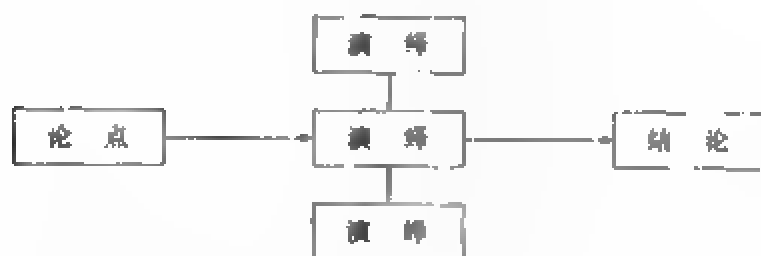


图2-3

沿着框图所示路径写下去，简洁易懂。

例文1是按图2-2示意写的，用语不多，十分清楚。

(4) 结尾

文章一定要有一个好结尾。

结尾收得好，则可以做到“言有尽而意无穷”或“意尽而言止”。

简单型论文的结尾，常采用“意尽言止”，即正文的结束为论文的结尾，开头与结尾相呼应。例文1的结尾就是这样，干净利落。

论文的结尾，切忌“画蛇添足”。

二、通用型论文写作

数学教学研究论文，除简单型论文的形式外，一般都采用通用型数学教学研究论文的形式，即"标题式"论文。

按照这种形式撰写论文，既便于作者整理材料，比较完整地表达思考过程与研究成果，又便于读者阅读、理解，并把握要点。

1. 论文的结构及特点

通用型数学教学研究论文的结构包括：

标题

署名

摘要

关键词

开头

正文

结尾

参考文献

再醒目些，如图 2-4 所示。

(署名置于标题下面)

标题，有时可分为总标题、副标题、分标题(段落标题)。

在通常情况下，论文只有一个标题，而在正文里，再设分标题，这种论文多为常见。如图 2-5 所示。

例如，例文 2：

标题　略论启发式数学教学的基本要求

正文里的分标题为

1. 由数学学习对象的特性决定的要求；

2. 由数学教学过程的特征决定的要求；

3. 由数学教学目的决定的要求；

4. 由学生的学习规律决定的要求。

通用型数学教学研究论文的结构，是由论文内容确定的。其特

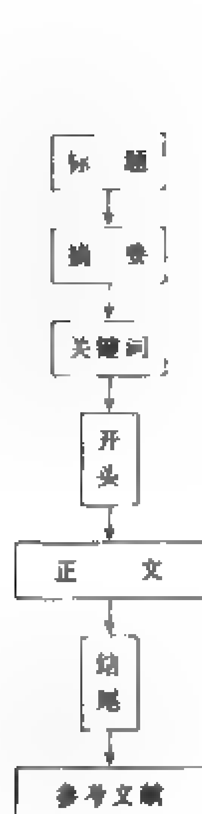


图 2-4

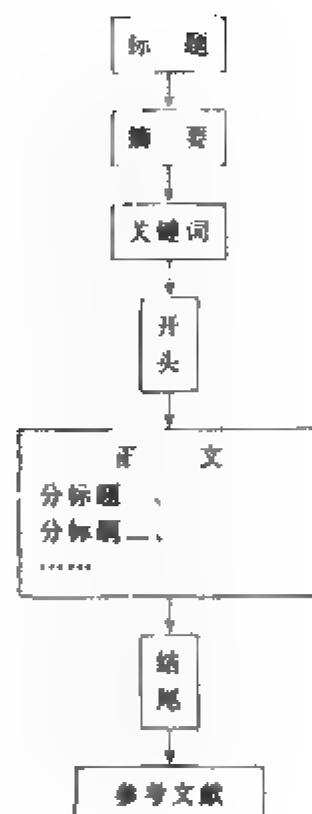


图 2-5

点是：

(1) 论文多为常见，科普性强；

(2) 文体较为灵活；

(3) 论文内容渗透着教育学、心理学、数学思想方法论等多门学科的知识；

(4) 论文内容新颖，具有创作新意；

(5) 属于重要科研成果，对提高教学质量、培养人才，具有指导意义。

2. 论文的写作要求

通用型数学教学研究论文的写作要求与前述类似之处，不再赘述。但在实际写作时，还必须强调以下几点：

(1) 从一篇教学研究论文的整体结构看，不管研究对象是什

么，其思维过程总是表现为：

由选择的内容，提出设想，经过反复推敲，确定标题，通过演绎（推导）展开，得出结论；

(2) 内容选择在关键处，带有普遍性；

(3) 题目推敲的准确，能显示出具有一定特点，能反映出研究的范围和达到的深度；

(4) 创作新意，能从不同角度上体现出新；

(5) 论文的价值能得到实践验证。

在写法上要突出以下几点：

(1) 对概念的写法，要着重揭示概念的内涵和外延；

(2) 对理论的写法，要强调条件，突出结论，要着重揭示其实质，体现出数学思想方法；

(3) 选择的实例，要富有启发性、典型性，有利于培养分析问题和解决问题的能力；

(4) 论文的标题与分段标题，要富有科学性、逻辑性、实用性，符合语法要求，精练简洁、富有特点；

(5) "渗透"的写法，要巧妙。

如辩证法、素质教育、思维方法、思想方法等，都应在关键处、或在演绎过程中渗透（体现），决不允许截然分开写，成为拼盘。

第三节 例文分析

例文 1

"矩阵特征多项式的一种求法"的一个注记

数学通报 1988 年第九期发表了陈兴龙的《矩阵特征多项式的一种求法》一文，该文给出了求矩阵特征多项式的递推方法，即

定理 1 设 A 为 n 阶方阵

$|\lambda I - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0$. 定义：

$$B_{n-1} = I_n$$

$$B_{n-2} = a_{n-1}I_n + AB_{n-1}$$

$$B_{n-3} = A_{n-2}I_n + AB_{n-2}$$

$$\cdots\cdots$$

$$B_1 = a_2 I_n + AB_2$$

$$B_0 = a_1 I_n + AB_1$$

$$a_{n-1} = -tr(AB_{n-1})$$

$$a_{n-2} = -\frac{1}{2}tr(AB_{n-2})$$

$$a_{n-3} = -\frac{1}{3}tr(AB_{n-3})$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_1 = -\frac{1}{n-1}tr(AB_1)$$

$$a_0 = -\frac{1}{n}tr(AB_0)$$

本文利用定理 1 及 Calay-Hamilton 定理给出了一个重要的事实，从而使得在用递推法求矩阵的特征多项式的同时还能求出矩阵的行列式及矩阵的逆（如果该矩阵可逆的话）。

我们有如下的

定理 2　设 n 阶方阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

则

(1) $|A| = (-1)^n a_0$；

(2) 若 A 可逆，则 $A^{-1} = -\frac{B_0}{a_0}$（其中 B_0 为定理 1 中定义的矩阵 B_0）。

证明　(1)在 $|\lambda I - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ 中令 $\lambda = 0$，则 $|-A| = a_0$，从而，$|A| = (-1)^n a_0$

(2) 由 Calay Hamilton 定理知，

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I_n = 0 \qquad (*)$$

由于 A 可逆，故 $a_0 = (-1)^n|A| \neq 0$，于是$(*)$式可化为：

$$-\frac{1}{a_0}(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1I_n)A = I_n$$

此示

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1I_n)$$

下证 $B_0 = A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1I_n$

事实上，由定理 1 中定义的矩阵：

$$B_{n-1} = I_n$$

$$B_{n-2} = a_{n-1}I_n + AB_{n-1}$$

$$B_{n-3} = a_{n-2}I_n + AB_{n-2}$$

$$\cdots\cdots$$

$$B_1 = a_2I_n + AB_2$$

$$B_0 = a_1I_n + AB_1$$

可知：

$$\begin{aligned}
B_0 &= a_1I_n + AB_1 \\
&= a_1I_n + A(a_2I_n + AB_2) \\
&= a_1I_n + a_2A + A^2B_2 \\
&= a_1I_n + a_2A + A^2(a_3I_n + AB_3) \\
&= a_1I_n + a_2A + a_3A^2 + a^3B_3 = \cdots \\
&= a_1I_n + a_2A + a_3A^2 + \cdots + a_{n-1}A^{n-2} + A^{n-1}B_{n-1} \\
&= a_1I_n + a_2A + \cdots + a_{n-1}A^{n-2} + A^{n-1}
\end{aligned}$$

所以，$B_0 = A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1I_n$

从而，
$$A^{-1} = -\frac{B_0}{a_0}$$

例 已知矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) 求 A 的特征多项式；

(2) 求 A 的行列式 $|A|$；

(3) A 可逆吗？若可逆，求 A^{-1}。

解 设 $|\lambda I - A| = \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$

由定理 1，$a_2 = -trA = -12$。

$$B_1 = -12I + A = \begin{pmatrix} -7 & -2 & -4 \\ -2 & -10 & 2 \\ -4 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

$$AB_1 = \begin{pmatrix} -15 & 2 & 4 \\ 2 & -12 & -2 \\ 4 & -2 & -15 \end{pmatrix}$$

故 $a = -\frac{1}{2}tr(AB_1) = 21, B_0 = a_1 I + AB_1 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & -2 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

$$AB_0 = 10I$$

于是，$a_0 = -\frac{1}{3}tr(AB_0) = -10$. 从而

(1) $|\lambda I - A| = \lambda^3 - 12\lambda^2 + 21\lambda - 10$.

(2) 由定理 2 知 $|A| = (-1)^3 a_0 = -a_0 = 10$.

(3) 因 $|A| = 10 \neq 0$，故 A 可逆，由定理 2 知

$$A^{-1} = -\frac{B_0}{a_0} = \frac{1}{10}B_0$$

$$= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & -2 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

参考文献

[1] 陈兴龙　矩阵特征多项式的一种求法．数学通报，1988，(9)

［分析］

1．内容选择

这是一篇数学教学研究论文。论文的内容是作者读了《矩阵特征多项式的一种求法》一文后，由此联想，巧妙地利用原文定理1及定义，选择了哈密尔顿-凯莱定理，给出定理2，并予以证明。取得了求矩阵行列式和求逆矩阵的新方法。

作者思路敏捷，既重视他人成果，又善于开拓性思维进行选题，深入研究，发现新问题。论文内容的选择巧妙、集中、深刻、精悍。

2．题目推敲

作者在选择了论文内容的基础上，经过推敲、锤炼，以《"矩阵特征多项式的一种求法"的一个注记》为题目，确切得体，贵在"一个注记"四个字上，它与原文标题搭配，使得论文题目有明确的内涵和外延，既贯穿全文，又吸引读者。

3．创作新意

作者不仅选题巧妙，而且在论文内容上有新的发现，给出定理2及其严格证明，从而取得了求矩阵行列式、逆矩阵的新方法。

4．写作技法

论文结构采用简单型，开门见山，简明扼要，自然与正文相互渗透，以直线式结构形式分析、论证，重点突出自己创新部分和新见解。

全文语言简洁，恰到好处，准确地表达数学概念和逻辑推理，能以最少的语言表达出最精湛的结果。论文结尾干净利落，前后呼应，使得论文短小精悍、完整统一。

例文 2

略论启发式数学教学的基本要求

教学改革的关键是教学思想的变革。因为教学思想对教学活动起着定向的作用，以不同的教学思想指导教学活动就会产生截然不同的教学效果。只有在正确的教学思想指导下，教学活动才能符合教学过程的客观规律，才能充分调动学生的学习积极性和主动性，才能培养学生的独立性和创造精神。

通过数学教学的实践以及对数学教学过程的客观规律的探索，我们认为数学教师应当确立启发式的教学思想。因为启发式作为一种贯穿于教学过程始终的教学思想，其核心是把教学过程看成一种特殊的认识过程，视学生为教学活动的主体，教师根据教学目的、学生的学习规律和知识的内部联系安排教学过程，充分调动学生的思维和学习的自觉性、积极性，引导他们生动活泼地学习，融会贯通地掌握知识，形成能力，发展智力。

因此，探讨启发式数学教学的内部规律具有重大的现实意义。本文试图从数学学习对象、数学教学过程、数学教学目的以及学生的数学学习规律等方面探讨启发式数学教学的基本要求。

1. 由数学学习对象的特性决定的要求

数学学习的对象是中学数学教材中的数学知识，是实行启发式教学的“物质基础”。因此，数学教学实行启发式必须以数学学习对象的特性为依据。

我们知道，“数学是研究广义的量的学科，其最本质的特性是抽象性，数学的对象是抽象思维的产物。例如，自然界中存在的是各种直线形、平面形、多面体、球形等物体，但几何中研究的直线、平面、多面体、球等却都是一些理想对象；自然界中存在的是各种变量的多种多样的联系，而联系的纯形式，在数学中是以理想对象

一函数而出现的；现代数学中，在已有概念的基础上，有意识地引进一些新概念的情况是很普遍的。因此，人们在学习、研究数学时，事实上必须经历两个步骤：获取数学研究对象（将自然界中的事物理想化，将现实问题抽象成数学问题，在原有概念中引出新概念等）和对这些对象的特性以及它们间的关系进行研究。

由数学对象的抽象性本质我们可以看到，能动的抽象思维在数学的学习、研究中占有突出的地位。由于思维的强烈的主体性（思维依赖于人脑的机能而存在，是人脑对客观现实的概括、间接的反映），因而就使得数学研究对象和数学的研究都带有强烈的主体性。这种主体性就要求人们在学习、研究数学时，充分发挥自己的主观能动性。这样，在数学启发式教学中，教师必须通过启发学生数学学习的主观能动性，引导学生通过自己的积极的思维活动去学习数学，获取知识；必须把培养学生的数学思维能力作为根本任务。在安排教学过程时，一定要让学生的思维有机会经历各个抽象阶段：从现实中抽象出数学对象（材料），通过从大量的或复杂的数学材料中抽取最重要的、本质的属性或特征，从外表不同的数学材料中分析它们的共同点的思维活动，形成新的数学概念（数学对象），通过分析数学对象的特征以及它们之间的关系，掌握数学的定义、定理、公式、法则等。

由于数学教科书所表述的是数学知识的逻辑体系，是一些经过加工整理的数学抽象（思维）的结果，数学对象的抽象过程、数学思维的活动过程都被掩盖了，这就使教师在进行数学教学时，容易出现重视数学思维活动的结果而忽视数学思维活动过程（特别是数学对象抽象过程）的现象，教学中，教师三言两语直接向学生介绍概念，然后立即让学生运用概念解答数学问题的情况是十分常见的。这事实上是在学生没有真正获得（理解）概念的时候就要求学生运用概念，一般地说，就是在学生没有获得数学对象时就要求学生对它们的关系进行认识，显然，这样的教学是不可能富有成效的。所以，在启发式教学中，教师一定要注意克服数学教材的不利

因素，注意向学生揭示数学教材中所蕴涵的数学思维活动过程，让学生能经历获得数学知识的各个抽象阶段，避免数学学习的表面化。

2. 由数学教学过程的特征决定的要求

数学教学过程是学生在教师的主导下，通过能动的数学思维活动，对数学教材进行学习的过程。在这一过程中，包含着教师与学生、教师与教材、学生与教材等一系列矛盾，这些矛盾的相互制约相互联系的运动构成教学过程的发展，其中，学生与教材的矛盾是教学过程的主要矛盾，集中表现在学生的数学思维活动过程与数学知识所反映的数学思维过程之间的矛盾上。辩证唯物主义的观点认为，矛盾的转化，外因是条件，内因是根据，外因通过内因而起作用，所以，教师只有根据学生的内因进行教学，才能真正促成教学过程的主要矛盾的转化。因此，在启发式数学教学中，教师必须根据学生的内因（主要有学生的学习动机、原有的知识基础、学生的接受能力等），给以适宜的条件，启发学生的内因发生变化，使学生真正学到知识，而不是把知识外加给学生，让学生死记硬背。要注意到数学教材的抽象性特点，认真分析知识所反映的数学思维过程，分析和把握学生的数学思维过程，安排适当的教学情境，使这两个过程协调同步地发展，使学生在解决这两个过程之间的矛盾的过程中去认识教材，掌握知识。

3. 由数学教学目的决定的要求

数学教学目的就是要促进学生的发展，通过数学教学，不但要使学生的数学认识结构获得发展，而且还要促进学生的一般发展。

首先，数学教学是学生在教师的主导下，有目的、有计划、有组织地学习数学知识，培养数学能力，发展智力的过程，是学生数学认知结构发展的主要途径。学生的数学认知结构在数学教学中的不断发展，是一个数学认知结构的不断建构的过程，是一个由低水

平向高水平进化的过程。学生在数学教学活动中，接受的新的数学知识由浅入深，知识面由窄到宽，他的数学知识系统得到不断充实、丰富，数学能力不断地得到提高。

按照当代认知心理学的观点，学生的数学认知结构的发展是随着学习层次的深入而获得的。学生利用他原有的数学认知结构积极主动地与新的数学知识进行相互作用，或者将新知识同化到已有的数学认知结构中，从而丰富了原有的数学认知结构，或者改变原有的数学认知结构以顺应新的知识，从而使数学认知结构得到发展。从认知的角度看，启发式数学教学对学生的数学认知结构的发展应在如下两个方面发挥作用。

第一，为学生的数学认知结构的发展确定方向和目标。现代认知理论指出，现在的教学再也不是教授学科之间的差异，而是为了引导学生对科学家、学者构建学科理论、原理、法则时所用的思维模式和策略的模仿，引导学生概括学得的知识，了解更为逼真的科学现实。因此，在启发式数学教学中，教师应当根据学生现有的数学认知结构的特点和水平，把掌握数学的基本概念、基本原理和法则，以及它们所蕴涵的数学思想方法作为教学的最主要的目标。

第二，为学生的数学认知结构的发展提供良好的环境和条件。首先，教师根据教学目的、学生的现有认知发展水平以及数学的逻辑体系来精选教学内容，编排出一种概括性强、操作性好的数学教材结构，以利于学生理解、学习，便于学生记忆、检索，达到学习迁移。其次，在教学中，教师充分利用学生现有的数学认知结构，以此作为同化新知识的基础，设置一定的教学情境，帮助学生进行认知活动。在学习概念、原理时，教师给学生提供丰富的、典型有效的直观背景材料，使学生在概念、原理的导向下，通过自己对材料的积极主动的思维活动，达到对概念的理性认识，并进一步指导学生将获得的概念进行归类、组合，构成一个便于操作的概念体系。在运用知识解决数学问题时，教师为学生提供一定的线索，在思维方法、认知策略上给以指导，以便学生能顺利地解决问题，并从中体

验数学的思想、方法，深化知识学习，获得数学能力，使智力得到较好的发展，从而使学生的数学认知结构获得良好的发展。

其次，数学教学中，学生除了获得数学认知结构的发展外，他们的身心也获得发展。“教学——这是学生的心理发展，形成他的智能、注意、记忆和心理的所有其它方面的新品质的主要动力。”因此，启发式数学教学必须为学生的全面发展服务。

按照前苏联心理学家维果茨基的理论，学生有两种发展水平，一种是现有发展水平，它是评定学生现有特点和已经达到的发展程度，确定当前发展范围的依据，是教学的出发点；第二种是“最近发展区”，它是学生的潜在发展水平，是经过教师的启发指导，经过学生自己的努力能够达到的发展水平，是教学所应努力追求的目标。教学只有以学生的现有发展水平为基础，以“最近发展区”为定向，才能有效地促进学生的发展。所以，启发式数学教学应当充分发挥学生的现有发展水平的积极作用，在学生的“最近发展区”上去帮助学生解决认知矛盾，促成学生的“最近发展区”向现实发展水平转化。要使学生经常处于“跳一跳摘果实”的状态，既要使学生感到负荷满，有适当的紧张感，又要使学生感到压力不太大，问题可以解决，从而激发学生的求知欲望，经过他们自己的积极探索，获取知识，得到发展。

4. 由学生的学习规律决定的要求

辩证唯物主义认为，人们掌握知识的过程是一个能动的反映过程。只有当教学符合学生的学习规律时，才能充分调动学生的主观能动性，使他们通过自己的积极主动的自我活动而达到学习的目的。因此，启发式数学教学必须符合学生的学习规律的要求。

学生的数学学习过程有如下特点：

第一，学生的数学学习过程是一个数学知识的“再发现”过程。

学生学习的任务相对于他自身来说是一种未知的东西，因此，学生的学习过程是一个数学知识的“发现”过程。但是，由于这种学

习任务是人类已经认识了的数学知识，有历史的经验可以借鉴，因此学生可以通过简捷的途径去掌握它，而不必经历第一次发现过程，又由于第一次发现过程的历史条件已不复存在，而且由于教学时间、条件等的限制，学生不可能重复漫长的第一次发现过程，因此学生的数学学习只能是一个“再发现”的过程。

由于学生的认知水平的限制，他们不可能独立地完成这种“再发现”的过程，而必须通过教师的启发引导。所以，在启发式数学教学中，教师要为这种“再发现”创造条件。对原发现过程进行“缩短”——即将第一次发现过程进行裁剪，使之变成为一条捷径，“平坡”——降低发现的难度，使之与学生的现有认知水平相适应，“精简”——减少发现过程的弯路，使学生能大致经历数学家获得数学发现时的思维过程，在一种自然、主动的状态下完成“再发现”过程。

第二，学生的数学学习是从理论或间接经验到实践，再由实践上升到理论的过程。

学生的数学学习是从理论或间接经验开始的，然后在教师的帮助下，把这种理论或间接经验与自己已有的经验(包括过去已学的知识和生活经验)进行同化，经过一定的实践(模型操作、观察、实验、做数学习题、参加社会实践等)，使之转化为他们自己内部的智力操作方式，从而上升为理性认识。当然，这里的“从理论到实践”并不是由认识到实践的飞跃，这时的理论对学生来说并不是他的理性认识，学生对理论所反映的客观对象的多方面的性质还没有掌握，不过，这一理论可以成为学生学习的向导；只有“从实践上升到理论”中的理论，才是学生的理性认识。这时的理论对学生来说是一种具体的、丰富的理论，学生对理论所反映的客观对象的多方面的性质也已把握。

学生的数学学习的这一特点要求教师在启发式数学教学中，努力为学生提供使所学的数学知识与已有的经验建立内部联系的实践机会。具体地说，教师在实施教学之前，要充分了解学生的学

习基础，因为数学是一门逻辑性、系统性很强的学科，学习基础不够，教学将无法进行。例如，没有整式加法的知识，就不能学习整式的乘法；没有指数的概念，就不能学习对数。由于学生认识水平的限制，他们对于教材中较多地反映了数学的逻辑结构，但掩盖数学思维的活动过程的数学理论是很难独立地完成认识过程的。他们对于数学理论背后所蕴涵的丰富的具体内容或者头脑中比较缺乏、或者有一定的感性认识但不能很好地将之与所学的理论相联系，而对于被理论所掩盖了的数学思维活动过程则更是难以把握。所以，在启发式数学教学中，教师要根据所学数学知识的逻辑顺序，以及知识所蕴含的数学思想、方法（这是初次接触知识的学生所难以把握的，但教师对它们应心中有数），为学生提供适量的、具有典型意义的具体材料，让学生在数学理论知识的导向下，对这些材料进行充分的感知，在此基础上再进行抽象概括，使新知识与原有的数学知识经验建立起内部联系，成为一个有机的知识整体，达到对数学理论的理性认识。

数学教学活动建立在学生的全部心理活动的基础上，只有在学生的全部心理活动都积极地投入到数学教学中来时，数学教学才能卓有成效地进行。按照心理学的研究，使学生的全部心理活动都积极地投入到数学教学中的实质就是要充分发挥学生的智力因素与非智力因素的积极性。但是，学生的智力本身是无所谓积极性的，它的积极性来自非智力因素，所以，只有当学生的非智力因素（由动机、兴趣、情感、意志、性格等组成）参与到认知活动中来后，智力才会真正地发挥积极性。

因此，在启发式数学教学中，教师应当采取切实有效的措施，努力调动和发挥学生的非智力因素的积极性。教师应根据学生现有的认知发展水平及数学知识之间的逻辑联系，创设一定的教学情境，以引起学生的内部矛盾冲突，这种冲突不但要使学生能够意识到，而且要使他们感受到经过自己的努力可以解决这种矛盾冲突，从而引起学生的好奇心、学习兴趣，激发起学生的学习动机，使

他们兴趣盎然地投入学习。教师要鼓励学生通过自己积极主动的思维活动去获取数学知识，并且在思考方向、思考方法、思维策略上加以适当的点拨，使学生经过自己的真正努力，克服掉学习上的困难而达到学习目的，让学生有充分的机会施展自己的数学才能，使他们看到自己在数学方面的特长，看到自己坚持不懈的努力的价值，从而培养学生的自信心、意志力及对数学的情感；教师要为学生创造一种适合于学生自己的身心发展水平的，有利于学生求异创新的良好的学习环境，以利于培养学生的坚忍不拔、勇于创新的优秀品质，让学生能经常得到成功的体验，感受到学习数学是一种精神享受，以利于培养学生学习数学的兴趣和情感。教师还可以利用数学发展的历史、数学在现代科学技术中的地位和作用等来激发学生学习数学的兴趣。

本文从理论上对启发式数学教学的基本要求作为初步探讨，希望得到广大数学教育工作者的指教。

数学教学中确立启发式的教学思想，是时代发展的迫切需要。是改革开放对数学教学工作提出的迫切要求。要使数学教学为培养学生的适应当代生活环境的健全的个性服务，就必须实行启发式。虽然在过去的教学理论中早就提出了教学要提倡启发式，反对注入式，但是对启发式的理论却一直没能作出系统、深入的研究，教学实践中仍然是注入式盛行。所以，广大数学教育工作者在今后的教学理论研究与实践中，应提高对启发式的认识，结合数学学科的特点，对启发式的内涵，实行启发式的基本要求和关键等作深入的理论探索，掌握启发式的内部规律，用以指导数学教育的实践。

［分析］

1. 内容选择

《略论启发式数学教学的基本要求》一文，是一篇理论性很强的数学教学研究论文。论文的内容，是作者针对过去几十年来对"启发式"缺乏理论研究和片面认识的问题，选择了以启发式数学

教学的基本要求为论题，进行了系统、深入的研究，在理论上提出自己的独立新见解，取得了创造性的成果。

论文内容选择的方向非常重要，作者的选题具有理论意义和现实意义，恰到好处：由数学学习对象的特定性决定的要求；由数学教学过程的特征决定的要求；由数学教学目的决定的要求；由学生的学习规律决定的要求等方面从理论上系统地论述和论证了启发式数学教学的基本要求，从而揭示出"启发式"的含义、实质。

2. 题目推敲

一般说来，在人们几十年来论及的"启发式教学"的老问题，这样大的范围里，选择或确定一个富有新意的题目是比较困难的。该文作者确定的以《略论启发式数学教学的基本要求》为标题及四个分段标题，准确得体，正确地表达了论文的中心内容，恰如其分地反映出研究的范围和达到的深度。语句精练、体例规范。作者锤炼的标题与分段标题的辩证性、科学性、逻辑性、理论性与具体性恰当好处，揭示出论文的主旨。

该论文标题(也叫题目)妙在"启发式数学教学的基本要求"12个字上。如果改用其他题目，文章就难作了。

3. 创作新意

作者不仅选题富有新意，更重要的在于作者能在"启发式"这个老议题上，从创新的角度探求新理论，取得了创造性成果。主要体现在：

(1) 过去几十年来，对"启发式"只是作表面文章，没有系统地从理论上分析研究，该文作者抓住了问题的关键；

(2) 论点正确，论据充分，论证严密，对"启发式"的含义、实质、规律、实施等有自己独立的新见解，在理论研究上有新的突破。

4. 写作技法

论文结构采用通用型：

标题　略论启发式数学教学的基本要求

分段标题

1. 由数学学习对象的特性决定的要求

2. 由数学教学过程的特征决定的要求

3. 由数学教学目的决定的要求

4. 由学生的学习规律决定的要求

作者十分巧妙地把“什么是启发式，为什么要启发式，启发什么，怎样启发？”等这样一个大的理论和实践问题，转化为上述标题和分段标题的形式，为全文的展开抓住关键。否则，这类论文是不好写的。

结构的辩证性、逻辑性、文学性，确实完美。

论文的开头，开门见山，研究的理由、目的、观点，论述简洁、确切，自然引出正文。

在正文写作中，作者以四个分段标题为中心内容，在论述、论证过程中做到了既理论又具体，使得论文的主旨新颖、深刻、集中、鲜明。

论文的结尾以其全文的条理性、科学性，得出明确的结论与开头呼应。作者采用的是展望建议式的结尾，读后，确实受到启发。

例文 3

积分运算中应注意的几个问题

本文指出在积分运算中容易忽视的几个问题，并指出文[1]、[2]、[3]中的几处错误。

一、不定积分与定积分的关系

一元函数的积分运算包括定积分与不定积分两个方面。定积分存在，我们称函数可积，不定积分存在，称原函数存在。

1. 定积分存在并不能保证原函数存在

例 1　函数 $x\operatorname{sgn}(\cos x)$ 在 $[0,\pi]$ 上可积，但在 $[0,\pi]$ 上却没有原函数。

事实上，我们知道函数的导数至多存在第二类间断点，所以，如果函数 $x\text{sgn}(\cos x)$ 存在原函数 $F(x)$，则由原函数的定义得

$$F'(x)=x\text{sgn}(\cos x)$$

即 $x\text{sgn}(\cos x)$ 为 $F(x)$ 的导函数，因而它至多存在第二类间断点。但函数 $x\text{sgn}(\cos x)$ 在 $[0,\pi]$ 上却有第一类间断点 $x=\frac{\pi}{2}$。所以函数 $x\text{sgn}(\cos x)$ 在 $[0,\pi]$ 上不存在原函数。

但是，函数 $x\text{sgn}(\cos x)$ 在 $[0,\pi]$ 上可积，且定积分值为 $\int_0^\pi x\cdot\text{sgn}(\cos x)\text{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\text{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-x)\text{d}x=-\frac{\pi^2}{4}$

2. 原函数存在并不能保证定积分存在

例 2　设 $f(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

可以证明，此函数 $f(x)$ 存在原函数 $F(x)$，即

$$F(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

但在 $[-1,1]$ 上却不可积。因为 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上无界。

3. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且存在原函数 $F(x)$，则一定有

$$\int_a^b f(x)\text{d}x=F(b)-F(a)$$

这个结论把一般教科书中牛顿—莱布尼兹公式成立的条件降低了，下面证明这个结论。

证：∵ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，

∴ 对任意 $\varepsilon>0$，总存在分割 $T:a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，使得

$$\bar{S}(T)-\underline{S}<\varepsilon$$

又 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在原函数 $F(x)$。

在每一个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 上应用微分中值定

理可得

$$F(x_i)-F(x_{i-1})=f(\zeta_i)\Delta x_i,\qquad \zeta_i\in[x_{i-1},x_i]$$

由此可得 $$\sum_{i=1}^{n}f(\zeta_i)\Delta x_i=F(b)-F(a)$$

又 $\because \underline{S}(x)\leqslant\sum_{i=1}^{n}f(\zeta_i)\Delta x_i\leqslant\overline{S}(x)$,

$$\underline{S}(T)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\overline{S}(T),$$

$$\therefore \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-(F(b)-F(a))\right|<\varepsilon$$

由 ε 的任意性可得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

二、不定积分计算也应注意被积函数的定义域

例如,在文[1]中第 365 页例 10,其结果为 $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+C$

现在,我们根据不定积分的定义检验这个结果是否正确。

由不定积分定义,假如该结果正确,则在被积函数 $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$ 的定义域 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 上恒有

$$\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+C\right)'=\frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}},$$

但是,当 $x<-1$ 时 $\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+C\right)'=-\frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$,因此,该题正确结果应为

$$C+\begin{cases}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, & \text{当 } x>1\\ -\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, & \text{当 } x<-1\end{cases}\qquad \text{或}\qquad \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}+C$$

又，参考文献[2]中，第 124 页 2.4.

$$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx=\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{x}$$，其结果是错误的。

正确答案应为

$$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx=C+\begin{cases}\sqrt{x^2-a^2}-a\cdot\arccos\frac{a}{x}, & x>|a|\\ \sqrt{x^2-a^2}+a\cdot\arccos\frac{a}{x}, & x<-|a|\end{cases}$$

错误的原因之一是对不定积分的理解上忽视了被积函数的定义区间，把被积函数在其定义区间的某一子区间上不定积分误认为是被积函数在整个定义区间上的不定积分；之二是在不定积分计算中忽视了实数有关运算性质。

三、可积函数的复合运算问题

我们知道，在研究函数的连续性与微分运算时，有相应的复合运算法则，但在积分运算中复合运算却不成立。我们说，可积函数的复合函数不一定是可积函数。

例 3　设函数 $f(x)=\begin{cases}0, & 当\ x=0\\ 1, & 当\ x\neq 0\end{cases}$ 与函数 $g(x)=$

$$\begin{cases}0, & 当\ x\ 为无理数,\\ \frac{1}{n}, & 当\ x=\frac{m}{n}(m,n\ 互为互质自然数,n\geqslant 1)\end{cases}$$

可以证明，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上都可积，但是复合函数 $f[g(x)]=\begin{cases}0, & 当\ x\ 为无理数\\ 1, & 当\ x\ 为有理数\end{cases}$，在 $[0,1]$ 上却不可积。

但是，若将条件加强，则有下面结论：

定理 1　若 $y=g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $m\leqslant g(x)\leqslant M$，函数 $f(y)$ 在 $[m,M]$ 上连续，则复合函数 $f[g(x)]$ 在 $[a,b]$ 上可积。

四、应用积分中值定理求极限应注意的一点

积分中值定理是说，若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 上至少存在一点 $\zeta\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\zeta)(b-a)$$

注意，这里的 ζ 不仅与 a、b 有关，而且与函数 $f(x)$ 也有关。

如文[3]中第 15 页例 14，求

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\cos^2 x\mathrm{d}x$$

其解法为：

由于 $f(x)=x^n\cos^2 x$ 在 $[0,1]$ 上连续，因而由积分中值定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\cos^2 x\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\zeta^n\cos^2\zeta$$

由于 $0<\zeta<1$，当 $n\to\infty$ 时 $\zeta^n\to 0$，而 $\cos^2\zeta$ 为有界量，因此，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\cos^2 x\mathrm{d}x=0$。

我们说这种解法是错误的，因为由中值定理得到应是与 n 有关的 ζ_n；虽然 $0<\zeta_n<1$，但当 $n\to\infty$ 时，$\zeta_n^n\to 0$，理由也不充分。事实上，若 $\zeta_n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$，就会有当 $n\to\infty$ 时，$\zeta_n^n\to\frac{1}{e}\neq 0$。

文[1]中第 398 页例 2 的 ζ 也应为 ζ_n。

五、重积分计算中积分区域对称条件的应用

文[1]中第 355 页例 8，有人这样做：

令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，则

$$\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^\pi \mathrm{d}\theta\int_0^{a\sin\theta}\sqrt{a^2-r^2}r\mathrm{d}r$$

$$= -\frac{1}{3}\int_0^\pi (a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{a\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{a^3}{3}\int_0^{\pi}(1-\cos^3\theta)d\theta$$

$$= \frac{\pi a^3}{3}$$

这种解法是错误的。

问题出在 $\int_0^{\pi}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{a\cos\theta}d\theta = -\int_0^{\pi}a^3(1-\cos^3\theta)d\theta$ 上，因为当 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$(\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}=\cos^3\theta$；当 $\theta\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 时，$(\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}=-\cos^3\theta$

为了避免运算中的错误，简化计算，应合理地运用积分区域的对称性。我们有下列结论。

定理 2　设二元函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，且 D 关于 y 轴对称。

(1) 若在 D 上，$f(x,y)$ 关于 x 是奇函数，即

$f(-x,y)=-f(x,y)$，　则 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=0$；

(2) 若在 D 上，$f(x,y)$ 关于 x 是偶函数，即

$f(-x,y)=f(x,y)$，　则

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy$$

其中 D_1 是 D 在 $x\geqslant 0$ 部分的区域。

类似地，此结论可改写为 D 关于 x 轴对称，函数 $f(x,y)$ 关于 y 是奇函数和偶函数的情形。

定理 3　设函数 $f(x,y,z)$ 在有界闭区域 Ω 上连续，且区域 Ω 关于 xoy 平面对称。

(1) 若在 Ω 上，$f(x,y,z)$ 关于 z 是奇函数，

则　$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz=0$；

(2) 若在 Ω 上，$f(x,y,z)$ 关于 z 是偶函数，则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$，其中 Ω_1 是 Ω 在 $z\geqslant 0$ 部分的区域。

类似地，可给出 Ω 关于 yoz、zox 平面对称时的结论。

参考文献

[1] 李庆春等编．数学分析．济南：山东教育出版社，1989.

[2] 方企勤等编．数学分析习题课教材．北京：北京大学出版社，1990.

[3] 李恒沛等编．高等数学方法．北京：北京航空航天大学出版社，1992.

［分析］

1．内容选择

这是一篇数学教学研究论文。论文的内容是作者发现《数学分析》、《数学分析习题课教材》、《高等数学方法》书中几道例题解答错了，由此联想，并结合教与学的实际进行分析，灵机一动，自然地选为论文的内容。

该论文内容的选择，恰到好处，巧妙地由：不定积分与定积分的关系；不定积分计算也应注意被积函数的定义域；可积函数的复合运算问题；应用积分中值定理求极限应注意的一点；重积分计算中积分区域对称条件的应用五个分段标题的主旨，不仅处理好书中几处错误的问题，而且解决了积分运算中容易忽视的几个问题的理论问题。

2．题目推敲

一般说来，在大家熟悉的微积分大范围里，选择有新意的题目是困难的。该文作者思路敏捷，善于在人们容易忽视的领域内选题。经过反复推敲、锤炼，以《积分运算中应注意的几个问题》为标题及分段标题（见论文），通俗得体，恰如其分。

如果针对论文内容选择的背景和论文主旨，改用其他题目就难以达到上述效果。

3. 创作新意

作者不仅选题通俗而新颖，而且在创作上富有新意。主要体现在：

(1) 在人们"容易忽视的几个问题"的领域内选题，使得论文内容、标题新；

(2) 在内容安排、处理上抓住了关键，分析、归纳、论证有自己的独立新见解。

4. 写作技法

论文结构采用通用型。

标题　积分运算中应注意的几个问题

分段标题

(一) 不定积分与定积分的关系

(二) 不定积分计算也应注意被积函数的定义域

(三) 可积函数的复合运算问题

(四) 应用积分中值定理求极限应注意的一点

(五) 重积分计算中积分区域对称条件的应用

完美的结构形式，通俗易懂的语句，揭示出论文的主旨。

论文的开头，仅用两句话，言简意明，引出正文。文中紧扣"应注意的几个问题"，通过分析、归纳、论证，使问题应刃而解。结尾干净利落，前后照应，使得全文简洁、完整、统一。

例文 4

二维随机变量概率分布的求解方法

类似于对一维随机变量的理解，本文用分布函数法和函数分布法，给出求二维随机变量概率分布的基本规律。

一、分布函数法

所谓二维随机变量分布函数法，是指解题时应强调和注意以

下事项：

1. 随机变量$\xi=(X,Y)$的分布函数

设$\xi=(X,Y)$为二维随机变量，对于任意实数x,y，称二元函数

$$F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}$$

为随机变量$\xi=(X,Y)$的分布函数，或称其为随机变量X和Y的联合分布函数。

这里强调两点：

(1) 事件$\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}$，就是事件$\{X\leqslant x\}\cdot\{Y\leqslant y\}$；

(2) $F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}$的实质是指$(X,Y)$的取值落在$xy$平面上，以$(x,y)$为顶点的左下方(包括边界)的无穷正方形内的概率。如图2-6阴影部分。

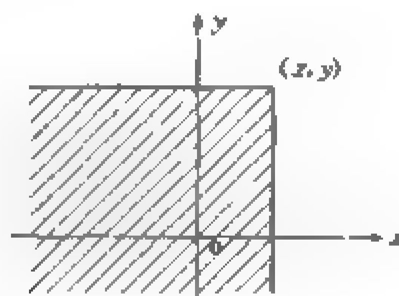


图 2-6

2. 分布函数的性质

(1) $F(x,y)$是变量x和变量y的不减函数，即对任意固定的y，当$x_2>x_1$时，$F(x_2,y)\geqslant F(x_1,y)$；对于任意固定的$x$，当$y_2>y_1$时，$F(x,y_2)\geqslant F(x,y_1)$；

(2) $0\leqslant F(x,y)\leqslant 1$，当$y$固定时，

$$F(-\infty,y)=\lim_{x\to-\infty}F(x,y)=0$$

对固定的x

$$F(x,-\infty)=\lim_{y\to-\infty}F(x,y)=0$$

且

$$F(-\infty,-\infty)=\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}}F(x,y)=0$$

$$F(+\infty,+\infty)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}F(x,y)=1$$

(3) 对于任意的 $x_1<x_2,y_1<y_2$，有

$$P\{x_1<X\leqslant x_2,y_1<Y\leqslant y_2\}$$
$$=F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)$$

如图 2-7 所示。

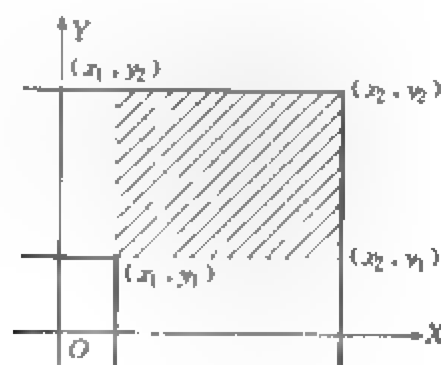


图 2-7

3. 离散型的

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}$$

且 p_{ij} 满足

$$p_{ij}\geqslant 0\ ;\quad \sum_i\sum_j p_{ij}=1;$$

$$F(x,y)=\sum_{x_i\leqslant x}\sum_{y_j\leqslant y}p_{ij}\qquad \begin{matrix}-\infty<x<+\infty\\ -\infty<x<+\infty\end{matrix}$$

4. 连续型的

$$P\{a<X<b,c<Y<d\}=\int_a^b\int_c^d p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

且 $p(x,y)$ 满足

$$p(x,y)\geqslant 0\qquad \begin{matrix}-\infty<x<+\infty\\ -\infty<y<+\infty\end{matrix};$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$$

5. 若$\xi=(X,Y)$的分布函数为$F(x,y)$，$p(x,y)$为概率密度，则有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

若$p(x,y)$在点(x,y)处连续，则有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=p(x,y)$$

例1　设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$p(x,y)=\begin{cases}ke^{-(3x+4y)} & x>0,y>0\\ 0 & 其它\end{cases}$$

其中k为常数，求$P\{0<X\leqslant 1,0<Y\leqslant 2\}$。

解　先确定常数，再求分布函数。

$$\because\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}kp(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$$

$$\therefore\quad \int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}ke^{-(3x+4y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$$

解得　$k=12$.

(X,Y)的分布函数$F(x,y)$

当$x>0,y>0$时，

$$\begin{aligned}F(x,y)&=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{0}^{x}\int_{0}^{y}12e^{-(3x+4y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=(1-e^{-3x})(1-e^{-4y})\end{aligned}$$

当x,y为其它情形时，$F(x,y)=0$，故

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-3x}(1-e^{-4y}) & x>0,y>0\\ 0 & 其它\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &P\{0<X\leqslant 1,0<Y\leqslant 2\}\\&=F(1,2)-F(1,0)-F(0,2)+F(0,0)\\&=(1-e^{-3})(1-e^{-8})\end{aligned}$$

例2　随机变量(X,Y)的概率密度为

$$p(x,y)=\begin{cases} x^2+\dfrac{1}{3}xy & 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

(1) (X,Y)的分布函数；

(2) (X,Y)的边缘分布密度；

(3) (X,Y)的条件密度；

(4) $P\{X+Y>1\}, P\{Y>X\}, P\left\{Y<\frac{1}{2}\middle|X<\frac{1}{2}\right\}$.

解 (1) 当 $x\leqslant 0$ 或 $y\leqslant 0$ 时，$p(x,y)=0, F(x,y)=0$

当 $0<X\leqslant 1, 0<Y\leqslant 2$ 时

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^x\int_0^y\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{3}x^3y+\frac{1}{12}x^2y^2$$

当 $0<x\leqslant 1, y>2$ 时

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^x\int_0^2 p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^x\int_2^y p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^x\int_0^2 p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^x\int_2^y 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^x\int_0^2\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{3}(2x+1)x^2$$

当 $x>1, 0<y\leqslant 2$ 时

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^x\int_0^y p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\int_0^y p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_1^x\int_0^y p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\int_0^y p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\int_0^y\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{12}(4+y)y$$

当 $x>1,y>2$ 时

$$F(x,y)=\int_0^1\int_0^2\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$$

综上所述,分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}0 & x\leqslant 0 \quad 或 \quad y\leqslant 0\\ \frac{1}{3}x^2y\left(x+\frac{y}{4}\right) & 0<x\leqslant 1,0<y\leqslant 2\\ \frac{1}{3}x^2(2x+1) & 0<x\leqslant 1,y>2\\ \frac{1}{12}y(4+y) & x>1,0<y\leqslant 2\\ 1 & x>1,y>2\end{cases}$$

(2) 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时

$$\begin{aligned}p_X(x)&=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}y\\&=\int_0^2\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)\mathrm{d}y\\&=2x^2+\frac{2}{3}x\end{aligned}$$

当 $0\leqslant y\leqslant 2$ 时

$$\begin{aligned}p_Y(y)&=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}y\end{aligned}$$

(3) 当 $0<x<1,0<y<2$ 时

$$P\{x|y\}=\frac{p(x,y)}{p_Y(y)}=\frac{6x^2+2xy}{2+y}$$

$$P\{y|x\}=\frac{p(x,y)}{p_X(x)}=\frac{3x+y}{6x+2}$$

(4) 如图 2 8、图 2 9 所示。

$$P\{X+Y>1\}=\iint\limits_{x+y>1}p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^2\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)\mathrm{d}y=\frac{65}{72}$$

$$P\{Y>X\}=\iint\limits_{y>x}p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^2\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{17}{24}$$

$$P\left\{Y<\frac{1}{2}\middle|X<\frac{1}{2}\right\}=\frac{P\left\{X<\frac{1}{2},Y<\frac{1}{2}\right\}}{P\left\{X<\frac{1}{2}\right\}}$$

$$=\frac{F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{F_X\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}x^2y\left(x+\frac{y}{4}\right)\Big|\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{\int_0^{\frac{1}{2}}p_X(x)\mathrm{d}x}=\frac{5}{32}$$

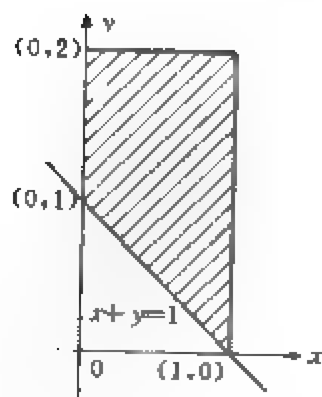


图 2 8

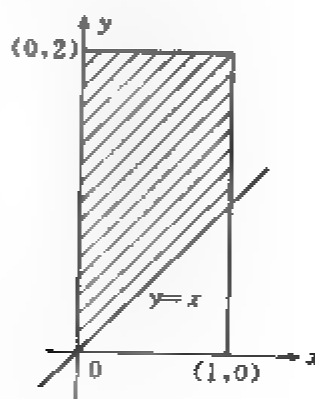


图 2-9

例 3　设(X,Y)的联合分布函数为

$$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{y}{3}\right)$$

试求：

(1) (X,Y)的联合密度函数；

(2) $P\{0\leqslant X<2,Y<3\}$

解　显然这是连续型二维随机变量的分布函数，由公式，其联合密度函数为

(1) $p(x,y)=\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\dfrac{6}{\pi^2(4+x^2)(9+y^2)}$

(2) $P\{0\leqslant X<2,Y<3\}$

$$=\int_0^2\int_{-\infty}^3 p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{6}{\pi^2}\int_0^2\frac{1}{4+x^2}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^3\frac{1}{9+y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{6}{\pi^2}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big|_0^2\cdot\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\Big|_{-\infty}^3=\frac{3}{16}$$

二、函数分布法

所谓二维随机变量函数分布法，是指

设已知随机变量(X,Y)的概率密度$p(x,y)$，又$f(x,y)$为二元连续函数，则随机变量函数

$$Z=f(X,Y)$$

的概率密度$p_z(z)$可以按下列程序求解。

(1) 先求出z的分布函数$F_Z(z)$

$$F_Z(z)=P\{f(X,Y)\leqslant z\}$$

$$=\iint\limits_{\substack{f(x,y)\leqslant z\\(-\infty<z<+\infty)}} p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(2) $F_Z(z)$对z求导得$p_z(z)$

$$p_z(z)=\frac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z}$$

1. $Z=X+Y$ 的分布

设随机变量(X,Y)的联合密度为 $p(x,y)$，求 $Z=X+Y$ 的密度 $p_Z(z)$可用下列公式

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,z-x)\mathrm{d}x$$

或者

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(z-y,y)\mathrm{d}y$$

当 X 和 Y 独立时，则 $z=X+Y$ 的概率密度为

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(x)p_Y(z-x)\mathrm{d}x$$

或

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(z-y)p_Y(y)\mathrm{d}y$$

2. $Z=X-Y$ 的分布

设随机变量(X,Y)的密度为 $p(x,y)$，求 $Z=X-Y$ 的概率密度 $p_Z(z)$可用下列公式

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,z-x)\mathrm{d}x$$

或

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(y+z,y)\mathrm{d}y$$

当 X 和 Y 相互独立时

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(x)p_Y(x-z)\mathrm{d}x$$

或

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(y+z)p_Y(y)\mathrm{d}y$$

3. $Z=X\cdot Y$ 的分布

设随机变量(X,Y)的密度为 $p(x,y)$，求 $Z=X\cdot Y$ 的概率密度 $p_Z(z)$可用下列公式

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p\left(x, \frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} \mathrm{d}x$$

或

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p\left(\frac{z}{y}, y\right) \frac{1}{|y|} \mathrm{d}y$$

当 X 和 Y 相互独立时，

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) p_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} \mathrm{d}x$$

或

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X\left(\frac{z}{y}\right) p_Y(y) \frac{1}{|y|} \mathrm{d}y$$

4. $Z=\dfrac{X}{Y}$的分布

设随机变量(X,Y)的密度为 $p(x,y)$，求 $Z=\dfrac{X}{Y}$的概率密度 $p_Z(z)$可用下列公式

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(yz, y) |y| \mathrm{d}y$$

当 X 和 Y 相互独立时

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(yz) p_Y(y) |y| \mathrm{d}y$$

5. $Z=\max\{X,Y\}$， $Z=\min\{X,Y\}$的分布

设随机变量 X 和 Y 相互独立，其密度和分布函数分别为 $p_X(x)$、$F_X(x)$和 $p_Y(y)$、$F_Y(y)$

(1) $Z=\max\{X,Y\}$的分布函数为

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{Z \leqslant z\} = P\{X \leqslant z, Y \leqslant z\} \\ &= P\{X \leqslant z\} \cdot P\{Y \leqslant z\} \leqslant F_X(z) \cdot F_Y(z) \end{aligned}$$

$$p_Z(z) = F'_Z(z) = p_X(z) F_Y(z) + F_X(z) p_Y(z)$$

当 X 和 Y 独立同分布时，$Z=\max\{X,Y\}$的分布函数和密度分别为

$$F_Z(z) = [F(z)]^2$$

$$p_Z(z) = 2F(z)p(z)$$

其中 $F(z)=F_X(z)=F_Y(z)$，$p(z)=p_X(z)=p_Y(z)$

(2) $Z=\min\{X,Y\}$的分布函数为

$$\begin{aligned}F_Z(z) &= P\{Z \leqslant z\} = 1 - P\{Z > z\} \\ &= 1 - P\{X > z, Y > z\} \\ &= 1 - P\{X > z\} \cdot P\{Y > z\} \\ &= 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_Z(z) &= F'_Z(z) \\ &= p_X(z)[1 - F_Y(z)] + p_Y(z)[1 - F_X(z)]\end{aligned}$$

当 X 和 Y 独立同分布时，则 $Z=\min\{X,Y\}$的分布函数和密度分别为

$$F_Z(z) = 1 - [1 - F(z)]^2$$

$$p_Z(z) = 2p(z)[1 - F(z)]$$

其中 $F(z)=F_X(z)=F_Y(z)$，$p(z)=p_X(z)=p_Y(z)$.

最后强调一下随机变量函数的联合分布。

设(X,Y)的联合密度为 $p(x,y)$，函数

$$u = h_1(x,y), v = h_2(x,y)$$

有连续偏导数，且存在唯一的反函数

$$x = x(u,v), y = y(u,v)$$

记$U=h_1(X,Y)$，$V=h_2(X,Y)$，则(U,V)的联合密度为

$$p(x,y) = \begin{cases} p(x(u,v), y(u,v))|J| & \text{有解} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

其中 $J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$

例 1　设两个独立的随机变量 X 与 Y 的分布律为

X	1	3
p_X	0.3	0.7

Y	2	4
p_Y	0.6	0.4

求随机变量 $Z=X+Y$ 的分布律。

解 ∵ X 与 Y 相互独立

∴ $p(X,Y)=p_X \cdot p_Y$

即

X \ Y	2	4
1	0.18	0.12
3	0.42	0.28

又因

p	(X,Y)	$Z=X+Y$
0.18	(1,2)	3
0.12	(1,4)	5
0.42	(3,2)	5
0.28	(3,4)	7

故有

$Z=X+Y$	3	5	7
p	0.18	0.54	0.28

例 2 设 X 与 Y 相互独立且 X 服从 $N(\mu,\sigma^2)$，Y 服从 $[-b,b]$上的均匀分布，求 $Z=X+Y$ 的分布密度。

解 X 与 Y 的密度分别为

$$p_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty<x<+\infty$$

$$p_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2b} & -b<y<b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

由公式，得

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(z-y)p_Y(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2b}\int_{-b}^{b}p_X(z-y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2b}\int_{z-b}^{z+b}p_X(u)\mathrm{d}u \qquad (令 z-y=u)$$

$$=\frac{1}{2b}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{z-b}^{z+b}e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2b\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{z-b-\mu}{\sigma}}^{\frac{z+b-\mu}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t \qquad \left(令\frac{u-\mu}{\sigma}=t\right)$$

$$=\frac{1}{2b}\left[\Phi\left(\frac{z+b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{z-b-\mu}{\sigma}\right)\right]$$

例 3 设随机变量 X 与 Y 相互独立，分布密度分别为

$$p_X(x)=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2} & 0<x<+\infty\\ 0 & 其它\end{cases}$$

$$p_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-y^2} & 0<y<+\infty\\ 0 & 其它\end{cases}$$

求 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的分布密度。

解 由 X 与 Y 相互独立，得 (X,Y) 的联合密度为

$$p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$$

$$=\begin{cases}\frac{4}{\pi}e^{-(x^2+y^2)} & 0<x<+\infty,0<y<+\infty\\ 0 & 其它\end{cases}$$

显然，当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$，$p_Z(z)=0$

当 $z\geqslant 0$ 时，(图 2-10)

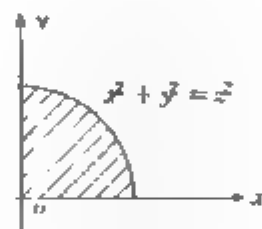


图 2-10

$$F_z(z)=\iint\limits_{Z\leqslant z} p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{4}{\pi}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant z^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^z \mathrm{e}^{-r^2} r\mathrm{d}r=1-\mathrm{e}^{-z^2}$$

$\therefore\ p_z(z)=F'_z(z)=2z\mathrm{e}^{-z^2}$

$\therefore\ Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的分布密度为

$$p_z(z)=\begin{cases}0 & z<0\\ 2z\mathrm{e}^{-z^2} & z\geqslant 0\end{cases}$$

例 4　设 X 与 Y 相互独立，且都服从区间$(0,a)$上的均匀分布，求 $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的分布密度。

解　由题意知

$$P_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a} & 0<x<a\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$P_Y(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a} & 0<y<a\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$\because$ X 与 Y 相互独立

$$\therefore\ p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{a^2} & 0<x<a,0<y<a\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

再求 $F_z(z)$ 和 $p_z(z)$，如(图 2-11、图 2-12)

当 $z<0$ 时，$F_z(z)=0$

当 $0<z<1$ 时，

$$F_z(z)=\iint\limits_{\frac{x}{y}\leqslant z} p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{a^2}\int_0^a \mathrm{d}y \int_0^{zy} \mathrm{d}x = \frac{z}{2}$$

$$p_z(z) = F'_z(z) = \frac{1}{2}$$

当 $z \geqslant 1$ 时,

$$F_z(z) = \frac{1}{a^2}\int_0^a \mathrm{d}x \int_{\frac{x}{z}}^a \mathrm{d}y = 1 - \frac{1}{2z}$$

$$p_z(z) = F'_z(z) = \frac{1}{2z^2}$$

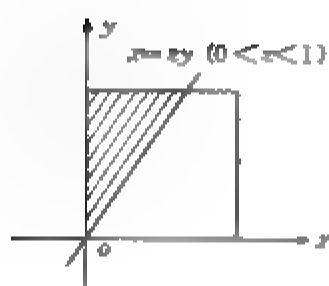


图 2-11

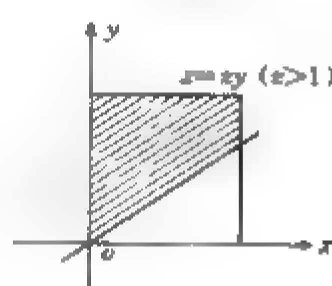


图 2-12

综上所述,$z=\dfrac{X}{Y}$的分布密度为

$$p_z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \dfrac{1}{2} & 0 \leqslant z < 1 \\ \dfrac{1}{2z^2} & z \geqslant 1 \end{cases}$$

例 5 设随机变量 X 与 Y 独立同负指数分布,其密度函数为

$$f(t) = g(t) = \begin{cases} 0 & t \leqslant 0 \\ \mathrm{e}^{-t} & t > 0 \end{cases}$$

试证明 $X+Y$ 与$\dfrac{X}{Y}$也独立。

证 由于 X 与 Y 独立同负指数分布,故(X,Y)的密度为

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-(x+y)} & x > 0, y > 0 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

令 $\begin{cases} u=x+y \\ v=\dfrac{x}{y} \end{cases}$， 则 $\begin{cases} x=\dfrac{uv}{1+v} \\ y=\dfrac{u}{1+v} \end{cases}$

当 $x>0, y>0$ 时，$u>0, v>0$

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \dfrac{v}{1+v} & \dfrac{u}{(1+v)^2} \\ \dfrac{1}{1+v} & -\dfrac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix}=-\frac{u}{(1+v)^2}$$

$\therefore \left(X+Y,\dfrac{X}{Y}\right)$ 的联合密度为

$$p(u,v)=\begin{cases} e^{-\left(\frac{uv}{1+v}+\frac{u}{1+v}\right)}\cdot\dfrac{u}{(1+v)^2} & u>0, v>0 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{u}{(1+v)^2}e^{-u} & u>0, v>0 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

$\therefore$

$$p_{X+Y}(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(u,v)\mathrm{d}v$$

$$=\begin{cases} \displaystyle\int_0^{\infty}\frac{u}{(1+v)^2}e^{-u}\mathrm{d}v & u>0 \\ 0 & u\leqslant 0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} ue^{-u} & u>0 \\ 0 & u\leqslant 0 \end{cases}$$

$$p_{\frac{X}{Y}}(v)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(u,v)\mathrm{d}u$$

$$=\begin{cases} \displaystyle\int_0^{\infty}\frac{u}{(1+v)^2}e^{-u}\mathrm{d}v & v>0 \\ 0 & v\leqslant 0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{1}{(1+v)^2} & v>0 \\ 0 & v\leqslant 0 \end{cases}$$

$\because \quad p(u,v)=p_{X+Y}(u)\cdot p_{\frac{X}{Y}}(v)$

$\therefore X+Y$ 与$\dfrac{X}{Y}$也相互独立。

例 6　对某种电子装置的输出测量了 5 次，得到观察值 X_1、X_2、X_3、X_4、X_5，设它们是相互独立的变量，且都服从同一分布

$$F(z)=\begin{cases}1-e^{-\frac{z^2}{8}} & z\geqslant 0\\ 0 & z<0\end{cases}$$

求：$\max\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}>4$ 的概率。

解　令 $V=\max\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}$

由于 X_1、X_2、X_3、X_4、X_5 相互独立，且服从同一分布，由前述公式，有

$$F_{\max}(z)=[F(z)]^5$$

所求概率

$$\begin{aligned}P\{v>4\}&=1-P\{v\leqslant 4\}=1-F_{\max}(4)\\&=1-[F(4)]^5=1-[1-e^{-2}]^5\end{aligned}$$

参考文献

[1]　冯泰，王玉孝编．概率统计辅导．北京：中国铁道出版社，1982.

[2]　于忠文主编．概率与数理统计．北京：中国商业出版社，1990.

［分析］

1. 内容选择

这是一篇数学教学研究论文。论文的内容是作者针对初学者感到概率论中多维随机变量概念抽象、习题难做、方法不易掌握等独特之处，由此联想，并结合教与学的实际进行分析研究，选择了二维随机变量概率分布的求解方法为论文的内容。

作者善于从数学习题课的角度上选题，并巧妙地加以筛选，以二维随机变量的分布函数，二维随机变量函数的分布作为论文的

主旨，结合富有启发性的典型习题，分析、归纳出"分布函数法"与"函数分布法"，对教与学有一定的指导意义，既巩固了多维随机变量的基础，突出了多维随机变量的重点，又抓住了突破多维随机变量难点问题的关键。

2. 题目推敲

一般来说，在数学各科教学领域里，选择具有新意的题目不是一件容易的事。该文作者能刻苦钻研教材，善于在人们熟悉的习题课领域里，寻找有规律性的东西。

在选择论文内容的过程中，经过反复推敲，确定了以《二维随机变量概率分布的求解方法》为标题，以"分布函数法"与"函数分布法"为分段标题，揭示出论文的内容和范围，使论文的题目在一般化中显出新颖。

这类选题，在数学各科教学领域里是大量的，也是很重要的。对难学的概念、公式、定理不好理解，对解题不得要领或思路闭塞，选择一些有启发性的典型问题作思维定势处理，帮助解惑、解困，拟出有新意的标题，撰写成数学教学研究论文是很有意义的。

3. 创作新意

如前所述，作者选题新，在内容安排和处理上有新特点，主要体现在：

(1) 题目隐含着学习概率统计课的统一高观点：一个随机试验的整体概率可以用一个相应的随机变量及其概率分布来描述，突出了二维随机变量及其概率分布的求解方法，抓住了学习多维随机变量的关键，使得论文的题目在习题课领域里显得新颖；

(2) 论文内容在安排、处理的手法上有新特点、有新意，以"分布函数法"与"函数分布法"贯穿全文，揭示出求二维随机变量概率分布的方法规律。

4. 写作技法

论文结构采用通用型：

标题　二维随机变量概率分布的求解方法

分段标题

（一）分布函数法

（二）函数分布法

简洁、对偶而重点突出的结构形式，揭示出论文主旨。

论文的开头仅用两句话，非常自然的引出正文。

正文的写法简练，抓住了突出重点、解决好难点的关键，以书中概念和已证明了的公式、定理，系统的提炼出“分布函数法”与“函数分布法”，以连续型随机变量为主，把“方法”渗透于例题中，把理论方法转化为具体可行的方法。

例题的解答过程，就是对理论分析、论证过程，这种渗透的写法，使得全文语言精练、论文主旨突出。

这类论文如果议论语句过多，就会适得其反，达不到论文写作要求。

论文结尾干净利落，与开头呼应。

第三章　数学思想方法论文

数学在其漫长的发展过程中，不仅建立了严密的数学知识体系，而且形成了一整套行之有效的数学思想方法。

数学思想方法，贯穿于数学问题的发现和解决的全过程中，在数学教学、科研、数学创造与发现、培养人才等方面都起到指导作用。因此，撰写数学思想方法论文具有十分重要的意义。

第一节　论文内容的选择

在概论中讲过，数学思想方法论文是指研究数学思想方法，运用数学思想方法所写成的文章。它属于数学方法论的范畴。因此，在选择论文内容时，作者应学习数学方法论有关知识。

一、数学思想方法

随着近代和现代数学的发展，数学方法论作为一门独立的学科已经建立并有了相应的发展，其重要标志之一就是出现了许多具有划时代意义的数学思想方法，导致了数学基础学科的重大变革。

1. 数学思想方法的含义

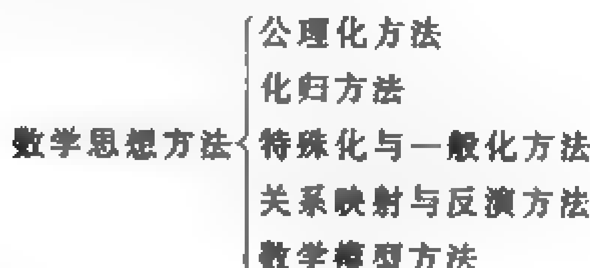
我们知道，数学发展的动力，无疑来自人类的生产实践活动，而数学思想和数学方法是其中重要的因素。而数学思想是人们通过数学活动（包括发现、研究数学知识、应用数学知识解决问题和教授与学习数学知识三项活动）认识世界的过程中所形成的基本观点；数学方法是为数学活动提供的思路、方式、逻辑手段和操作原则。

这里所说的数学思想方法(广义地讲,任何数学知识都是思想方法)是贯穿于数学知识之中的微观线索。思想方法以知识为基础,隐含在知识之中,反过来又指导、促进知识的发展深化及向能力转化。方法是实施思想的手段,思想是对应方法的精神实质和理论依据。数学思想方法是数学的生命和灵魂,它有普遍意义和永恒的价值。

2. 一般的数学思想方法

数学的方法分为一般的思想方法和具体的方法(包括解题方法)有几百种之多,不赘述。

常见的一般的数学思想方法如下:



(1) 公理化方法

即从尽可能少不定义的原始概念和基本公理出发,利用逻辑推理法则,把某一门数学构建成演绎系统的方法。

在具体研究工作中,公理化方法,特别是它的逻辑思维有着重要的作用。如图 3-1 所示。

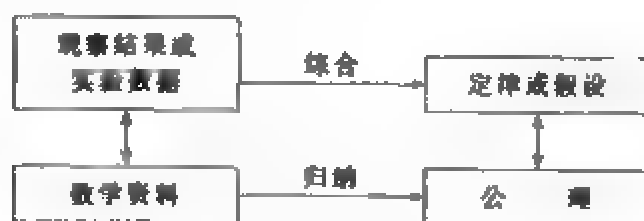


图 3-1

由图 3-1 表明,由"果"到"因"。即对所得的观察材料、运用数学的公理推导的方法,归纳出定律。

由"因"到"果"如图 3-2 所示。

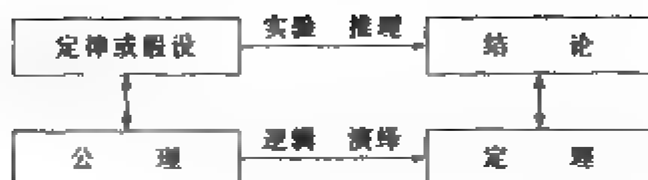


图 3-2

从基本假说或少数定律出发，进行理论推导，看会推出哪些尚未观测得到的或尚未发现过的现象，然后再用实验去验证。

例如：用公理化方法在整理数学知识，促进新理论的创立和对数学乃至其他科学理论的表述都有重要作用；用公理化方法可把零散的数学知识用逻辑链条串联起来，使之成为一个简洁的、条理的、和谐的有机体系，等等。

(2) 化归方法

化归方法就是把待求解的问题，通过某种转化过程，归结到一类已经解决或比较容易解决的问题，借此来获得问题的解决。

化归方法又称化归原则，是数学方法论中的基本方法之一，是数学家思考和解决问题的基本原则。

一般模式如图 3-3 所示。

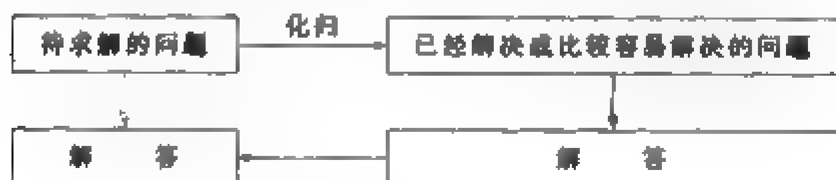


图 3-3

有时要按上图进行多步化归，问题才得以解答。

例如：解析几何的创立，使几何问题化归为代数问题，使用坐标法将“形”(曲线)的问题化归为“数”(方程)的问题。

数学中用化归法解决问题的例子举不胜举。

(3) 特殊化与一般化方法

1) 特殊化方法

对于一个具有一般对象的问题，从简单情况或特殊对象入手，寻求思路和方法予以解决，这种方法称为特殊化方法。

对于一个一般的、抽象性问题，其中的对象、因素、概念、结构比较复杂，它们的关系比较隐蔽，由条件到达结论的途径不清晰。这时，往往从特殊情况入手，用特殊化的方法探索解题的思路和途径，并选择突破口，进而解决一般问题。

特殊化的方法不仅是解题、检验问题的重要方法，而且还是探索规律进行创造性思维的有效工具，历来被数学家所推崇。

2）一般化方法

对于一个不易解决的特殊命题，将之一般化，即从考虑一个对象过渡到考虑包含该对象的一个集合；或者从考虑一个较小集合过渡到考虑一个包含该较小集合的更大集合，然后先解决一般情形，再把解决一般情形的技巧、方法或其结果应用到特殊命题上，最后获得特殊命题解决，这种思想方法称为一般化方法。

利用一般化方法解决问题通常有三种类型：

① 直接把特殊命题扩广为包含这一特殊情况的一般命题，利用一般命题的现成结论直接还原回去就得到解答；

② 作出拓广后，利用一般命题的性质去解决特殊命题；

③ 作出拓广后，利用一般命题的解答思路去探讨解决特殊问题的思路。

特殊与一般是辩证统一的。从一般到特殊的演绎法，从特殊到一般的归纳法以及从特殊到特殊的类比法等，运用巧了，能获得新的成果，乃至完成重要的发现。

这里谈及的归纳法与类比法是数学方法论中最基本的方法。其作用如图 3-4 所示。

图 3-4

(4) 关系映射与反演方法

当处理具有关系结构 S 的数学问题有困难时，可选择适当的映射，把考察的问题所在的关系结构 S 映成与它有一一对应关系的关系结构 S^*，在新关系结构 S^* 中，可把问题结果得到之后，再通过逆映射反演到 S，从而求得问题的结果，这种处理问题的方法叫做关系(Relation)映射(Mapping)反演(Inversion)方法，简称 RMI 方法。

RMI 方法，最早由数学方法论专家徐利治教授提出，在他的有关著作中有详细论述。

为更确切地表述 RMI 方法的含义和步骤，先介绍几个相关的术语：

① 关系结构

彼此间具有某种或某些数学关系的对象的集合统称为关系结构系统。

这里所说的数学关系是广泛的，如代数关系、几何关系、序关系、函数关系、解析关系、泛函关系、拓扑关系、相容关系、不相容关系、相关关系，等等。

② 映射与反演

凡是在两类数学对象或两个集合的元素间建立了一种对应关系，就定义了一个映射。如果是一一对应关系，则必有逆映射，称为可逆映射。

设 φ 是一个映射，它把集合 $S=\{a\}$ 中的元素映满另一集合 $S^*=\{a^*\}$，其中 a^* 表示 a 的映像，a 为原像，记作

$$\varphi: S \to S^*, \quad \varphi(a)=a^*$$

特别地，如果 S 是一个关系结构系统，φ 能将 S 映满 S^*，记作

$$S^*=\varphi(S)$$

称 S^* 为 S 的映像关系结构系统，S 为原像关系结构系统。

把映射 φ 的逆映射称为反演，记为 φ^{-1}，

$$\varphi^{-1}: S^* \to S$$

③ 关系演射与反演法

设原像数学关系结构系统 S 中未知性态的对象为 x，它是问题中需要确定的目标，称为目标原像，在映射 φ 的作用下，有

$$\underline{x}^{*} = \varphi(x)$$

称为目标映像。

若在映像数学关系结构系统 S^{*} 中，目标映像 $\underline{x}^{*}$ 能通过一定的数学方法 ψ 找出来并确定为 x^{*}，则称 ψ 为定映手续。

有了 x^{*} 之后，则通过反演 φ^{-1} 可相应地把 $\underline{x}$ 确定为

$$x[x = \varphi^{-1}(x^{*})]$$

综合上述，用 RMI 方法解决问题的一般过程如图 3-5 所示。

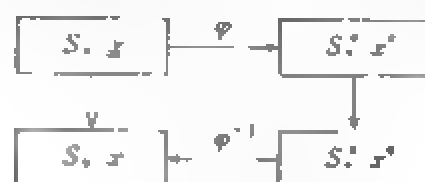


图 3-5

整个过程包含如下几个步骤：

关系—映射—定映—反演—获解

例如：求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 的和 $(|x|<1)$

$$S = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

取映射 φ：对级数逐项微分

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n}$$

定映手续 ψ：求和为 $\frac{1}{1-x^2}$

取逆映射 φ^{-1}：对和积分

$$\int_0^x \frac{1}{1-t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

即得

$$S = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \qquad (|x| < 1)$$

由此可见，RMI 方法是一种普遍有效的数学思想方法，导致数学新理论、新学科的产生。如解析几何、微积分、群论，等等。

(5) 数学模型方法

把所考察的问题抽象或构造成相应的数学模型（详见第四章），通过对数学模型的研究，使问题得以解决的方法称为数学(Mathematics)模型(Model)方法。简称 MM 方法。

运用 MM 方法的程序是，将实际问题提炼成数学模型，然后求出数学模型的解，最后再返回到实际问题得到原问题的解答。

二、数学思想源于数学思维

我们知道，数学思维是人脑和数学对象交互作用并按照一般的思维规律认识数学本质和规律的理性活动，具体来说，数学思维就是以“数”和“形”及其结构关系为思维对象，以数学语言和符号为思维的载体，并以认识发现数学规律为目的的一种思维。

数学思维可分为逻辑思维、形象思维和直觉思维三种基本类型。在数学思维的全过程中，孕育着数学思想，数学思想源于数学思维之中。在这种思想指导下，对某一类数学方法进行概括，即形成数学思想方法。如数形结合的思想方法、分类讨论的思想方法、抽象分析的思想方法、构造方法、反例方法等。

为了发掘数学思想方法，论文内容的选择可在思维“差异”即思维品质等方面进行探讨。

1. 激励质疑，培养思维的深刻性

思维的深刻性，即抽象逻辑性，是指能够透过事物的表面现象把握其本质及其相互关系，正确认识事物发展规律，表现为善于使用抽象概括，理解透彻深刻，推理严密，逻辑性强。在数学思维活动

中能抓住数学问题的本质属性及其相互联系；从研究的材料（已知条件、解法与结果）中揭示被掩盖住的个别特殊情况；能组合各种具体模式。

在上述原则下，在数学思维的深度上，激励自己大胆提出新问题，追根求源，揭示问题的实质。

2. 纵横渗透，培养思维的广阔性

即思维的广度。是指善于全面地分析问题，思路开阔、多角度、多层次地探求。数学思维活动中表现为能把握数学问题整体，抓住它的基本特征，同时不放过其中有意义的细节与特殊因素，进行多方面的思考，找出解决问题的多种方法，并推广应用于类似的问题中。

在上述原则下，有意识地将数学学科自身、数学各学科、各分支的知识间进行渗透，从而使思维开阔，获得一题多解或一法多用。

3. 多维思索，培养思维的灵活性

思维的灵活性，即思维的灵活程度，是指能依据客观条件的变化及时调整思维的方向。表现为能对具体的数学问题作具体分析，善于根据情况的变化，及时调整原有的思维过程与方法，灵活运用有关的定理、公式、法则，并且思维不囿于固定程式或模式，具有较强的应变能力。

在上述原则下，善于发现新的条件和新的因素，能从多层次、多角度去思考问题，在多维思索中，学会灵活处理、解决问题的思想方法。

4 辨析对比，培养思维的批判性

思维的批判性，即思维的独立性。是指思维活动中独立思考，善于提出疑问，并发表不同看法，严格客观地评价思维的结果，及时地发现和纠正错误。在数学思维活动中，表现为对已有的数学表达和论证提出自己的见解，自我评判，辨别正误，排除障碍，寻求最佳答案。

在上述原则下，善于根据实际情况，展开创造性思考并提出独立见解，辨析对比，发现问题的实质。

5. 勇于猜测，培养思维的创造性

思维的创造性，即思维的创新程度。是指思考问题和解决问题时的方式、方法或结果的新颖、独特、具有创造性。在思维活动中表现为能独立地发现问题、解决问题，勇于创新、敢于突破常规的思考方法和解题程式，大胆提出新的见解和采用新的方法。

在上述原则下，既要善于发散思维、又要善于收敛思维，开拓创造性思维，寻找解决未发现和未解决的问题，大胆提出数学猜想，在研讨数学猜想的过程中，获得新的成果。

第二节　论文的写作

数学思想方法论文内容的选择领域是十分广阔的。但是，要想写一篇好的数学思想方法论文不是一件容易的事。它不仅要求作者具有多学科数学理论基础知识，还要求作者认真学习数学方法论、数学教育学等有关知识，在数学教学中发掘数学思想方法。只要我们深入探索和研究，就会创作出好的数学思想方法论文。

一、论文的结构及特点

1. 论文的结构

由于数学思想方法论文涉及的知识面广，为了便于作者表达思考过程，突出研究成果，论文的结构一般采用图3 6的形式。

正文里有若干个分标题(段落标题)，这些分标题都是反复推敲、锤炼而成，对论文起到关键性的作用。

例如：

标题　浅谈加强数学思想方法教学的途径

正文里的分标题

1　改变观念，提高数学思想方法教学的意识性

2　摸索规律，贯彻数学思想方法教学的四项原则

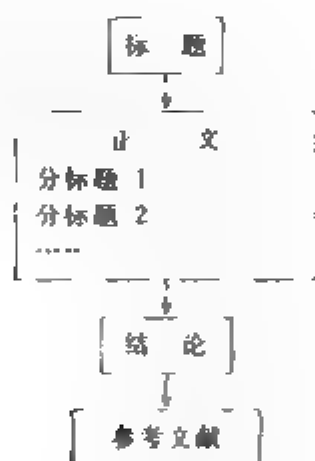


图 3 6

2.1　渗透性原则

2.2　反复性原则

2.3　系统性原则

2.4　明确性原则

（郭立昌．数学通报．1992.6）

2. 论文的特点

我们知道，数学方法论有宏观方法论和微观方法论。宏观的数学方法论，主要是研究数学思想方法发展规律；微观的数学方法论，主要是研究数学创造的方法和法则。由此可知数学思想方法论文有以下主要特点：

（1）富有哲学意义

这类论文的哲理分析，无论对数学研究还是哲学研究都有一定的学术价值。

（2）突出数学思想史

这类论文常巧妙地由分析数学史料，为数学思想方法提供宝贵的材料。

（3）渗透辩证法

这类论文在涉及数学对象的同时，还涉及到思维主体认识过

释的辩证性。读后，无论对数学的或哲学的思考都会有所启发。

(4) 涉及数学及其他知识面广

一篇数学思想方法论文常常涉及到多学科数学的知识。涉及到数学方法论、数学教育学、心理学等知识，巧妙地渗透写法，突出了论文的主题

二、学习、挖掘数学思想方法

1. 认真学习数学思想方法

数学方法论，是研究和讨论数学的发展规律、数学思想方法以及数学中的发现、发明与创新等法则的一门学问。要认真学习徐利治先生的《数学方法论选讲》及解恩泽、徐本顺先生的《世界数学家思想方法》等著作。

要认真学习数学发展史。因为许多数学思想方法和原理是从数学发展史中分析、研究、归纳出来的，学习数学史，可加深作者对数学发展宏观规律的认识。

数学思想方法是数学的灵魂，是数学家的灵魂。数学家的思想方法，主要指的是数学家创造或运用的关于数学本身的论证、运算及其应用的思想、方法与手段，以及对数学对象、内容、性质、特点、功能与产生发展规律等方面问题的认识。数学家的思想方法，表现在许多方面，主要有以下六个方面。

(1) 研究数学的思想方法。其中包括数学的特殊方法(如解析法、极限法、数学归纳法、递归法、关系映射反演法等)；科学研究的一般方法(如公理方法、观察与实验、归纳与演绎、分析与综合、科学抽象、移植法、模型法、想像、猜想、逐次逼近、简单性原则、统一性原则、成功与失败的反思、相似思维、逆向思维、发散思维、收敛思维等)；哲学方法(如普遍联系的观点、历史与逻辑相统一，从抽象到具体等)。

(2) 作为数学内容的思想方法。其中包括：

① 概念类，如线性空间、算子等；

② 定理、公式类，如哥德尔不完性定理、闵可夫斯基不等式等；

③ 理论类，如群论、突变理论等；

④ 工具类，如算图、计算机等。

(3) 学习数学思想方法。其中包括继承性学习的思想方法和创造性学习的思想方法，前者是前提和基础，后者是发展和目的，以后者为重点。

(4) 传授数学的思想方法。其中包括在教学中向学生传授，在科研中向研究人员传授，在生产实践中向实践者传授等方面的思想方法。

(5) 应用数学的思想方法。其中包括将数学应用于自然科学、社会科学和哲学理论研究的思想方法，应用于科学技术和经济管理的思想方法等。

(6) 研究数学思想方法的思想方法，其中包括按不同历史时期、不同国家或民族、不同数学家、不同学科领域或理论，考察和分析数学思想方法研究的思想方法特点、价值及其创造性。

由此可见，一个重大成果的取得，往往与思想方法的创新有着密切关系。数学思想方法与数学成果一样，对数学的发展是同等重要的，都是数学的宝贵财富。

要选读数学家的著作及名家传记，体味透了其中的独特的数学思想与数学方法，找出其中最活跃、最有生命力的部分。

要博览群书，开拓知识领域。数学内部各分支间相互渗透、数学与自然科学、工程技术科学、社会科学，特别与哲学的相互渗透，都隐涵着新的概念、新的方法、新的理论。这就要求我们尽可能地多读书，多参加实践，开拓自己的知识领域，确立科学的反映论观点，提高自己的理解和想像能力。

2. 在教学中挖掘数学思想方法

在实现教学目的过程中，数学思想方法的教学起着重要的作用。它是学生形成良好认识知识结构的纽带，是由知识转化为能力

的桥梁，是培养学生数学观念、数学素质的关键。

一般说来，在教学中，教师对数学思想方法的教学重视不够，教法往往不得要领：

(1) 对具体知识、技能训练要求比较明确，而忽视数学思想方法的教学要求；

(2) 注重知识的结论，削弱知识形成过程中数学思想方法的渗透；

(3) 在知识应用中偏重了就题论题，不善于从数学思想方法的角度加以提炼；

(4) 课堂教学小结时，注重知识的系统整理，缺乏上升到数学思想方法的高度上进行归纳。这样，就很难写出好文章。

要写出有价值的数学思想方法论文，必须在数学教学中，挖掘数学思想方法。也就是说，教学目的确定、教学过程的实施、教学效果的落实等各个方面都要体现出数学思想方法，挖掘渗透着数学思想方法的内容，从而使学生从数学思想方法的高度把握知识的本质和内在的规律。

加强数学思想方法的教学，应突出渗透性原则。这是因为教材的编写不可能既写知识又写数学思想方法，后者是蕴涵在数学知识系统之中的。因此，教师在教学全过程中其思维活动如图 3-7 所示。

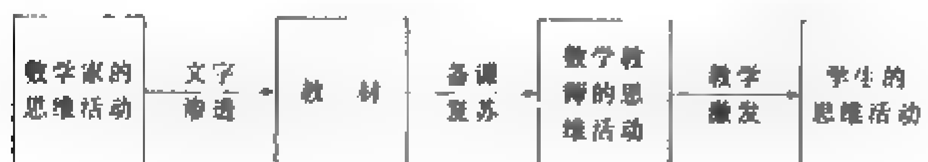


图 3-7

即应结合学生的认识规律，结合知识结构特点，将概念、公式、定理等内容中蕴涵着的数学家的思想方法挖掘出来，渗透于教材中，教师将教学重点、难点处理的关键揭示出来。经过这样精心设计的教学过程，在教学中有意识潜移默化(不是讲一段知识内容，

再讲 段所用的数学思想方法)地引导学生领会蕴含在其中的数学思想和方法。

由此可见,只要我们认真学习数学思想方法,加强数学思想方法的教学,体会深刻了,就会创作出有新意的数学思想方法论文。

第三节 例文分析

例文 5

数学创造性思维的心理机制及其能力的培养

创造性思维是一切创新活动的基础和核心,是各种思维中最为积极也最有价值的思维形式。在数学教学中,重视学生创造性思维能力的培养,无疑具有重要的意义。本文将通过对创造性思维心理机制的分析,探讨培养学生创造性思维能力培养的教学途径。

一、数学创造性思维的心理机制

创造性思维是人类最高层次的思维活动,它是 种非常复杂的心理和智能活动,需要有创见的设想和理智的判断。根据庞加莱关于数学创造的理论,创造性思维就是根据需要调动储存在大脑中的各种知识与经验的表现,是辨认、选择和重新组合的过程。因此,当人们在开展创造性活动之前,就在头脑中凭借各种思想创造性地组合着创造活动的映像。它产生的心理机制,主要包括创造诱因、信息储备和序化方式三个环节。

1. 创造诱因

创造诱因是指能诱发思维主体产生创新意识的各种因素,其作用是形成问题情境,建立起创新目标和达到目标的意向。这些诱

因包括思维主体强烈的创造欲望，兴趣爱好，社会或个人的需要，原型或相关信息的启示，旧有的理论或方法的缺陷或矛盾，试图对某种现象作出解释以及科学发展的内在逻辑提出的课题或预见性猜想等。创造诱因所产生的问题必须在思维主体的认知结构中是新颖的，才能形成创造机制。

2. 信息储备

信息储备是指思维主体对实现创新目标应具备的相关信息的储存状态。要使愿望成为现实，就需要对头脑中已有的信息进行重新组合，这就涉及到主体的认知结构中在“质”和“量”两个方面所储备的有关信息是否足够推动问题解决的进程。如果信息能够满足重新组合的需要，则主体就能进一步展开思维活动来实施这种组合，使创造性活动的进行具有可能；如果信息不足，则主体就需要通过观察、实验、查阅资料、钻研相关问题等手段获取更多的可靠信息，以达到进一步展开思维活动所需要的相关信息。

3. 序化方式

序化方式是指思维主体有效地使用相关信息时所进行的思维方式。它应是系统地、协调地、灵活地运用思维的各种基本方式(诸如形象思维、逻辑思维、直觉思维和发散思维等)和方法(如分析、归纳、类比、想像和猜想等)，并借助于其他科学理论和方法，促进有序信息系统的产生，从而使进行创造性活动的可能变成现实。可以说，创造性思维是各种思维的相互结合，高度协调的产物，特别是逻辑思维与非逻辑思维、集中思维与发散思维的统一。在数学创造活动中，往往是在已有经验的基础上，先通过非逻辑思维达到对事物的本质认识，迅速找到解决问题的突破口并形成数学猜想，然后再经过逻辑思维的严格论证，获得创造的成功。因此，在创造性活动的关键阶段，非逻辑思维的作用往往表现得非常明显，但如果没有严密的逻辑思维，就不可能有创造性思维的最终成果。由此可见，创造性思维是逻辑思维与非逻辑思维的有机统一，是逻辑思维—非逻辑思维—逻辑思维的辩证发展过程。此外，在创造性思维

中，发散思维和集中思维也是必不可少的构成部分。一般说来，在数学创造活动的前期，为了尽可能多地获得各种设想，需要先进行发散思维；而在创造性活动的后期，由于较多的设想已经出现，这时就需要运用集中思维加以辨认、筛选和论证。因此，发散思维是集中思维的前提和基础，集中思维是发散思维的结果和归宿。整个创造性思维的过程就是沿着发散→集中→再发散→再集中……的轨迹，循环往复，不断地发散与不断地否定非最佳答案，直到创造成功。所以创造性思维的过程也可以看作是寻求发散思维与集中思维二者最佳结合的过程。

二、数学创造性思维能力的培养

创造性思维不仅存在于数学家的创造活动中，也存在于学生的学习活动中。这是因为，学生学习的数学知识虽然是前人创造性思维的结果，但学生作为学习的主体处于发现的地位，学习活动实质上仍然具有数学发现和创造的性质。因此，在数学教学中培养学生创造性思维能力是完全可行的。根据上述对创造性思维产生过程的心理分析，在数学教学中可通过如下途径加以培养。

1. 数学教学要充分展示数学思维过程

(1) 重视数学思维活动中的认识发展阶段。数学教学中的思维活动大致可分为认识发生阶段和知识整理阶段。前者是指概念如何形成、结论如何被发现的过程；后者是指用演绎法进一步理解知识，开拓知识的过程（有些相似于数学创造中的"发现"与"论证"两个阶段）。由于前一阶段是引导学生探索知识的过程，它闪耀着创造的火花，是培养创造性思维能力的极好时机。因此，前一阶段比后一阶段更为重要，在展现数学思维活动的全过程时，应着重前一阶段，使学习与发现同步。然而，在数学教学中，只重结论，不重形成以及教师本末倒置地把新课匆匆带过，以腾出时间来复习等种种做法，都是削弱认识发生阶段的表现，不利于创造性思维能力的培养。

（2）数学思维的展示应包括三种思维活动的展示，主要有：数学家的思维活动；教师的思维活动；学生的思维活动。教师在教学过程中应协调好这三种思维活动：应根据数学知识结构（体现在教材中）重视数学家的思维活动过程；指导、调节、控制学生的思维活动，使之与教师的数学思维活动（也即数学家的思维活动）同步，并逐步实现学生的思维结构向数学家的思维结构转化；帮助学生发现及总结开展数学思维活动的规律、方法及技巧。

教师正是通过自己创造的思维活动，在数学家的思维活动与学生的思维活动之间架设桥梁，以实现三种思维活动的和谐。数学家希尔伯特在哥廷根大学任教时，常常在课堂上即兴提出一些新的数学问题，并立即着手解决。虽然他并非每次都能得到圆满的解答，甚至有时把自己"挂"在黑板上，但他展现的思维过程却使学生受益匪浅。追根溯源，希尔伯特的老师富克斯教授在为希尔伯特讲授线性微分方程时，就采用了这样一种教学方法。富克斯对所讲内容总是现想现推，这使希尔伯特和他的同学们看到了高明的数学家创造性活动的思维过程。华罗庚教授在自己的教学生涯中，也一向重视概念产生、命题形成及思路获得的思维过程的教学，并着意回答学生提出的"你是怎样想出来的"一类问题。这些事例都说明了采用开放式教学方法充分展示数学思维过程对于培养学生创造性思维能力的重要作用。

2. 激发学生的好奇心、求知欲

李政道说："好奇心很重要，有了好奇心，才敢提出问题。"法国作家法朗士也说："好奇心造就科学家和诗人。"教师的责任在于把学生的好奇心成功地转移到探求科学知识上去，使这种好奇心升华为求知欲。具体来说，在教学过程中应根据学生的特点和水平，采取适当的启发学生积极思维的教学方法，让学生主动地去探索数学真理，培养学生学习数学的兴趣和刻苦钻研数学问题的热情和毅力，引导学生敢于和善于发现问题或提出问题，爱护、支持和鼓励学生中一切含有创造因素的思想和活动。

在教学过程中，要尽量通过问题的选择、提法和安排来激发学生，唤起他们的好奇心与求知欲。对问题的提法、安排要有教学艺术性，提法不同，会有不同的效果，要设法使得提法新颖，让学生坐不住，欲解决而后快；安排问题既要符合需要，掌握时机与分寸，又要考虑学生的特点，注意他们的"口味"与喜好。例如，提出"2^{25}是几位数？用对数计算"的问题之后，学生不怎么感兴趣。如果换一种提法："某人听到一则谣言后一小时内传给两人，此两人在一小时内每人又分别传给两人，如此下去，一昼夜能传遍一个千万人口的大城市吗？"这样发问后，学生有了解决此问题的兴趣和积极性，效果就大不一样了。起先谁都认为这是办不到的事，经过认真运算，发现能传遍，结果出人意料，但又在情理之中。这样发问不但能激发学生的积极性，培养他们的探索精神，同时，通过问题的解决使学生受到思想教育。

3. 加强直觉思维的训练

直觉思维作为数学思维的重要类型之一，经常与解决数学疑难困难相联系，伴随数学创造性思维出现。在进行创造性思维活动时，人们常常依靠直觉、灵感进行选择、判断形成数学猜想，在数学创造活动中起着重要的作用。培养直觉思维能力的重点是重视数学直觉。徐利治教授就曾说过："数学直觉是可以后天培养的。实际上每个人的数学直觉也是不断提高的。"他认为直觉思维能力是可以在学习过程中逐步地成长起来的。

通常在数学教学中加强直觉思维的训练应当从以下几个方面入手：

(1) 提供丰富的背景材料，恰当地设置教学情境，促使学生做整体思考。直觉思维的重要特征之一就是思维形式的整体性。对于面临的问题情境首先从整体上考察其特点，着眼从整体上揭示出事物的本质与内在联系，往往可以激发直觉思维，从而导致思维的创新。

(2) 引导学生寻找和发现事物的内在联系。直觉思维的另

个重要特征是思维方向的综合性。在数学教学中，引导学生从复杂的问题中寻找内在的联系，特别是发现隐藏的联系，从而把各种信息做综合考察并做出直觉判断，是激发直觉思维的重要途径。

(3) 教学中要安排一定的直觉阶段，给学生留下直觉思维的空间。学生的思维能力是在实践和训练中发展的，在教学中适当推迟做出结论的时机，给学生一定的直觉思维的空间，有利于在整体观察和细部考察的结合中发现事物的内在规律，做出直觉判断，这是发展学生直觉思维能力的重要措施。

(4) 鼓励学生大胆猜测，养成善于猜想的数学思维习惯。猜想是一种合情推理，它与论证所用的逻辑推理相辅相成。数学教学中许多命题的发现、思路的形成和方法的创造，都可以由学生通过数学猜想而得到。因此，应当精心安排教材，设计教法，在引导学生开展各种归纳、类比等丰富多采的探索活动中，鼓励他们提出数学猜想和创见。一般说来，知识经验越多，想像力越丰富，提出数学猜想的方法掌握得越熟练，猜想的置信度就越高，实现数学创造的可能性也就越大。培养敢于猜想、善于探索的思维习惯是形成数学直觉、发展思维创造性的重要途径。

4. 加强发散思维的训练

发散思维是一种开拓性、创新性的思维，它是创造思维的主要形式，加强发散思维的训练对创造性思维的培养具有重要的意义。

发散思维的过程包括两个基本环节，一是发散对象（或发散点），二是发散方式。数学中的发散对象是多方面的，如对数学概念的拓广，对数学命题的引申与推广（包括分别对条件、结论、关系的发散），对数学公式、法则的变型与派生等。发散的方式也是多种多样的，如对命题而言，可以是替换命题的条件或结论；也可以是减弱条件、加强结论；或是予以特殊化、一般化；还可以进行类比、推广等。在解决问题时，可以将解题的途径、思想、方法等作为发散点进行发散。因此，在数学教学中只要能抓住时机，以研究的数学对象作为发散点进行多种方式发散，便能有利于发散思维能力的培

养。

发散思维具有流畅性、变通性和独特性等特征。根据这三个特征，在数学教学中加强发散思维的训练应从培养三种机智入手。

(1) 培养发散机智。在一个数学问题前尽可能多地提出许多设想、多种解法途径与多种答案。这种机智主要能提高发散思维的流畅性。如数学中的一题多变、一题多问、一题多解、一法多用等都有助于发散机智的培养。

(2) 培养变换机智。一般事物的质和量是由多种因素及其相互关系决定的，如改变其中某一因素，或改变因素之间的位置、地位、联想方式，常常可以产生新思路。这种机智主要提高发散思维的变通性。数学中的变量替换、几何问题代数化与代数问题几何化、几何变换等都属于这种机智。

(3) 培养创优机智。要千方百计寻求最优答案以及探索途径，方法要独特，内容要新颖、简化。数学史上许多重大发现正是实现创优机智的体现。数学教学中寻求简便证法、反常规解法以及独特解的训练正是为此目的。

[分析]

1. 内容选择

《数学创造性思维的心理机制及其能力的培养》是一篇理论性较强的数学思想方法论文。论文的内容，是作者在研究思维规律的过程中，选择了从思维生理学、思维心理学的角度上，对创造性思维心理机制进行分析，并归纳出培养学生创造性思维能力培养的教学途径，有自己的独立见解。

论文内容选择的角度很重要，作者善于从问题的交叉点、关键处选题，使得论文内容既具有理论意义又具有实际意义。

2. 题目推敲

一般说来，由于思维科学的理论涉及的学科多、知识面广，选择有新意的题目不是一件容易的事。该文作者思路开阔，在思维科

学的大范围里，抓住了关键，在创造性思维的特征、过程、规律、作用及"培养的教学途径"上作文章，以《数学创造性思维的心理机制及能力的培养》为标题及分段标题(见论文)，做到了准确得体，反映出论文的中心内容、研究的范围和深度，使得论文既理论又具体。

从表面上看，19个字的题目，似乎长了一点，如果改换一下，难以体现上述特点。

3. 创作新意

作者不仅选题有新意，而且在理论和实践上，该文具有创作新意。主要体现在：

(1) 创造性思维是各种思维中最为积极最有价值的思维形式；思维科学涉及的面广，作者善于在交叉点、关键处选题；

(2) 作者能巧妙地从认知心理学的理论，从大脑机能、心智的组合与运动的角度来研究思维的机制，并将它转化为培养学生创造性思维能力培养的教学途径。

4. 写作技法

论文的结构采用通用型：

标题　数学创造性思维的心理机制及其能力的培养

分段标题

(一) 数学创造性思维的心理机制

1. 创造诱因

2. 信息储备

3. 序化方式

(二) 数学创造性思维能力的培养

1. 数学教学要充分展示数学思维过程

2. 激发学生好奇心、求知欲

3. 加强直观思维训练

4. 加强发散思维训练

富有辩证性、逻辑性的完美结构形式，揭示出论文的主旨。

作者拟定的论文结构形式，是写作的关键。该文论点明确、论述集中、论证严密、完整统一。否则，这类论文是不易写好的。

例文 6

数学美是深奥的美

一、引　言

古今中外有许多数学家和科学家，提出或论述过数学与美学的关系，明确地提出过数学美的概念。数学美的提出引起了很多争论，不承认数学美的至今还大有人在，其中甚至还有大名鼎鼎的美学家和数学家。数学美的研究是目前美学界、科学哲学界关注的热点与难点之一。不承认数学美的理由或原因归纳起来有以下四条：第一，传统的观念认为，美的欣赏只与形象思维有关，极力将逻辑严密的数学美摒弃于审美领域之外。第二，美是一个丰富的、完整和谐的整体观念，而丰富、完整和谐的数学理论体系的创立，又经过了长期跨世纪的工作，这样，数学美相对于其他形式的美就显得姗姗来迟，容易被美学家们所忽视。第三，数学以抽象的形式反映和谐的自然美感，因此，数学美是最难感受的美。第四，1750 年美学从哲学中分化出来，正式割断了美学与自然学的传统联系，也是数学美被历代美学家们所忽视的原因之一。本文针对以上四条原因，从各种不同的角度，论证数学美不但是美，而且是一种深奥的美、崇高的美。

二、美的欣赏离不开逻辑思维

美是人的本质力量对象化而引起的一种愉悦的情感体验。初看起来，它和逻辑思维是格格不入的，似乎情感的培育必然妨碍思维的严格，而严格的逻辑思维又必然导致情感世界枯竭、荒芜。其实，这是一种误解。这种误解首先是由于传统的美学家们常凭他们

对自然美和艺术美的欣赏经验谈审美，但对审美中心理过程的心理机制不清楚。

1981 年诺贝尔生理学、医学奖获得者斯佩里和他的同事经过 20 年的"裂脑"研究，在脑科学史上第一次发现：两个分离的大脑半球都具有语言机能，都有高度发达的意识，并且在对空间的认识能力方面和对复杂关系的理解能力方面，右半球比左半球更优越。斯佩里的研究还表明，具有不同功能的人脑两半球由于胼胝体的作用，双方是联合起作用的。（胼胝体是连接大脑左右半球的横行神经纤维束，起着连接左右半球全部皮质的作用。）正是由于在正常情况下，大脑的两个半球是作为一个功能单位紧密地结合在一起而发生作用的，所以人类的各种心理活动（自然也包括审美直觉活动），都可以说是自觉性与非自觉性、逻辑与非逻辑、理性与非理性的统一。当然，和一般的认识不同，在审美直觉中，逻辑思维是在人们不自觉的情况下起作用的。由于大脑两半球的交叉作用，审美主体面对审美对象在一瞬间产生的审美直觉中，无疑既具有形象的特征，又具有抽象的性质。也就是说，审美感受虽然是直觉地作出的，可感受的产生却又有赖于抽象分析和逻辑推理。因为形象思维、空间定位、整体判断、图形识别、色彩欣赏、感情倾向等，虽然以右半脑为主，但同时又离不开左半脑的逻辑功能的辅助和制约。这也正像美国科学家利用 X 正电子层摄影和放射性示踪原子的方法进行研究所证明了的，右脑解决问题的程序，往往要靠左脑加以储存。换言之，即一个脑半球所学到的知识，可以在顷刻间疾速传递给另一脑半球。而我们之所以常常意识不到这一点，是由于大脑两半脑信息交流速度无比迅疾之故。据统计，正常人的胼胝体大约是两亿条神经纤维组成的，而由它联系的大脑两半球之间的信息交流，每秒钟可达 40 亿次之多。人脑对刺激信息的"比较"和"识别"不是依靠线性序列程序，而是可以在百万以上的通道上同时进行。

其次是由于对逻辑的一种过于偏狭的看法，没有重视逻辑思

维的力量和价值。他们认为逻辑仅仅是一些三段论式的连接程序，更有人错误地将之等同于形而上学的思维方式。我们认为，"对逻辑一词应给定比较宽泛的内涵和外延。所谓逻辑，就是人们在实际思维过程中总结和提炼出来的关于思维的模式、规律和规则的学说。"正如列宁所指出的："人的实践经过千百万次的重复，它在人的意识中以逻辑的格式固定下来。"因而在外延上，逻辑不仅是包括演绎逻辑及其现代发展，而且包括辩证逻辑、归纳逻辑以及逻辑科学方法等在内的一门科学。

逻辑思维积淀于艺术的构思和创作中，如对作品主题的提炼，结构的安排，表现手法的选择等。日本当代著名的科学美学家川野洋便把这种想法付诸实践，他设计了艺术的控制论模型并使用电子计算机，再现了音乐、造型艺术、文学、诗歌等有关艺术的美学逻辑过程，从而创立了"计算美学"。"计算美学"的出现，一方面有可能在物质上以机械的方式来设定艺术品；另一方面，也可以演绎的方式来规定欣赏的过程。总之，说明逻辑思维在美的欣赏中的重要作用，即在审美中，要深刻领略艺术之美，常常必须在具体感受的基础上，进一步利用逻辑思维工具理解艺术美的内涵，才能产生美感。

逻辑思维是人的本质力量之一，它的产生和发展，使人类认识世界和改造世界的能力日益增强，成果日益丰富。在人类的一切认识活动中，逻辑思维是最基本、也是运用最广泛的一种思维方式。尤其是在科学探索活动中，如果没有逻辑思维，那简直是不可思议的。正如列宁赞同的黑格尔的话："任何科学都是应有逻辑。"这是因为，任何科学的创立，都有提出和引入概念的问题；进行抽象和概括的问题；进行推理和论证的问题；构成演绎系统的问题；顿悟假说、预测事实并对其进行评价、验证以及发展问题；而所有这些问题的解决都离不开各种逻辑手段和工具。历史上逻辑学的每一次革命性进展，都带来了科学的飞跃：亚里士多德演绎逻辑的诞生，带来了古希腊空前的繁荣；培根归纳逻辑的创立，掀起了近代

科学革命的狂飙；现代逻辑的多元勃兴，促进了现代科学和哲学全方位的拓展。……这不能不让人想起恩格斯的精辟断言："一个民族想要站在科学的最高峰，就一刻也不能没有理论思维。"由此可见，逻辑思维对于人们不仅是一种能力，而且更是一种价值，它在洞察现象、探求本质、寻找规律和设计未来等方面的强大力量，使人类体会到了一种精神上的自由感、力量感，产生强烈的情感愉悦，亦即审美感受。科学大师爱因斯坦在探索规律的过程中，由衷地称赞科学美是"思想领域最高的神韵"、"一种壮丽的感觉"。庞加莱也根据切身体会谈到："数学家能够如此获得类似于绘画和音乐所给予的快乐。"

三、迟到的美是完美的美

作为科学语言的数学，具有一般语言文学与艺术所共有的美的特点，这就是数学在其内容结构与方法上都具有某种美，但数学美又有自身的独特含义。什么是数学美呢？历史上许多学者、数学家对数学美从不同侧面作过生动的阐述。

亚里士多德说："虽然数学没有明显地提到善和美，但善和美也不能和数学完全分离。因为美的主要形式就是'秩序、匀称和确定性'，这些正是数学所研究的原则。"达·芬奇认为："美感完全建立在各部分之间神圣的比例关系上。"庞加莱说："数学家把重大意义与他们的方法和他们的结果的美联系起来。这不是纯粹的浅薄涉猎。事实上，在解题、证明中，给我们以美感的是什么呢？是各部分的和谐，是它们的对称、它们的巧妙平衡。"维纳认为："数学实质上是艺术的一种。"徐利治教授认为："数学在其内容结构上和方法上也都具有其自身的某种美。"徐本顺教授认真研究上述诸看法，从美学与数学角度进行总结，给出数学美的定义：数学美是一种人的本质力量通过宜人的数学思维结构的呈现。最早提出美学思想的数学家、哲学家毕达哥拉斯，他认为美学的研究对象不仅是艺术，而且包括整个自然界。他还把数与和谐的原则用于天文学的研

究，他们发现弦在振动时所发出的音调的强度与弦长成反比，又发现与自然数(如：1、2、3、…)成比例的弦长所发出的音调最和谐。后来他们又把这个发现推广到无法用实验予以验证的"球体音乐"中。他们把数视为构成宇宙的基本因素，数的和谐构成了宇宙的和谐，美就是从这一和谐中产生出来的。但在古代的这些美学思想，通常都以哲学的论述形式出现，那时的科学和艺术都是统属于哲学范畴的。

后来随着人类社会的进步和发展，各门科学的分工越来越细。美学也不例外，由于人类审美心理功能的研究愈来愈深入，审美意识与美学思想也愈来愈丰富，终于到了1750年，美学也从哲学领域中分化出来，成为一门独立的学科。此时数学与艺术也开始分化，直到成为两个很少发生联系的领域。特别是后来的绝大多数美学都渊源于文学家和艺术家，在他们潜心研究文学与艺术的时候，更是几乎不涉及数学美。随着各门学科专门化的步伐日益加快，艺术和数学的分离也越来越远。真正把数学与美学联系在一起并对数学美本身进行有意识的和自觉的研究，还是近百年来的事情。因此，数学美既是美学殿堂里最早的成员，又是迟到的成员。现代数学的飞速发展，一方面抽象程度越来越高，另一方面既高度分化又高度综合，因而能更深刻、更全面地反映客观世界的运动发展规律。当今的数学科学已是一个庞大的体系，据统计，它已包括近百种分支。一个丰富的、完整的、和谐的数学理论体系已经创立，同时数学中也孕育了最完美的数学美，正如徐本顺等人论述的，若按数学美的内容分类可分为：

• 结构美　指数学的一种内在的美，它来自各部分的和谐秩序，并能为纯粹的理智所领会，正是这种内在美给了满足我们感官的五彩缤纷美景的骨架。

• 语言美　数学语言是一种特殊的语言，因为它有一整套世界公认的数学符号系统。数学语言借助于数学符号把思维运算(过程)扼要地表现出来，并能准确地、深刻地把现象的结构表现为其

不变式。数学语言,以它的简洁、概括、精确、有序、富于形象化、理想化的美的特征和形式,给人们以美的感受。

· 方法美　一个美的数学方法或数学证明是指在解答复杂问题中,体现出来的美妙之处使心灵感到一种愉快的惊奇。数学方法的美是以其简洁性、普适性与奇异性为基本特征。

若按数学美的形式分类可分为:

· 神秘美(内在美)　是指数学美的内容诸要素的内部组织结构,即"从科学深处发现看起来不同的事物在本质上的一致性,看起来无关的事物间深刻的联系,极其复杂的运算的结果为一最简单最原始的数、等等。"并由此萌生的一种神秘感所激发的快乐美好的感情。神秘美中包含奇异性、思辨性。

· 形态美　是指数学美的内容的外部表现形态。它包含简洁性、统一性(和谐性)、对称性、整齐性、相似性。

四、最难感受的美是深奥的美、崇高的美

自然美体现的是自然界的现象和谐,数学美体现的是自然界(或社会)的内在和谐。自然美具体、鲜明、潇洒,最易显现。任何人对那幽静的月夜、宁静的山谷、银河倒泻似的瀑布,红霞映照的平川,都可以产生美的感觉。数学美抽象、含蓄、严谨,则最难感受。最难感受的原因,主要是美感的实现要求主体具有相应的审美心理结构。马克思指出:"从主体方面来看,只有音乐才能激起人的音乐感;对于不辨音律的耳朵来说,最美的音乐也毫无意义。音乐对它来说不是对象,因为我的对象只能是我的本质之一的确证……。"这就是说,对于美的感受并不是人的普遍本性,并且还存在个体差异。主体只有建立了相应的审美心理结构,才能将具有一定审美价值的抽象公式、理论、实验纳入自己的审美结构体系,只有在理解的基础上才能对其发生审美体验。这种相应的审美心理结构的形成除了具备一般的审美感知能力外,还依赖于两个因素:首先是主体对于数学美对象的充分理解能力。由于数学美对象大多是以逻

辑严谨的概念语言、概括性极强的图表、公式来表现的，那么，这必然要求主体具备相当程度的凭借概念、判断和推理等逻辑手段，舍弃现象、概括本质、洞察规律的能力，以及通过专门教育和训练所获得的知识和技能。显然，这一条并非人人具备，从而把一部分人摒弃在一定的审美领域之外。正如狄拉克所说："不可能把数学美搞得比艺术中的美更明确，但是研究数学的人通常是不难理解的。"

其次，审美心理结构的形成也是由人们对于美的本质的理解以及相应的审美态度决定的。美的本质是多层次的，简略的加以区分，可归结为两类：一是事物以其外在的感性形式所呈现的美，如自然美、艺术美等；二是事物以其内在结构的和谐、秩序而具有的理性美、抽象美、深奥美，主要指科技美、数学美。前者由于是外在的、易感受的，因而生动而具体，很易唤起人们内心中的和谐共鸣，产生美的享受，受到美的陶冶。但与后者如优美的理论、简洁的公式、精巧的试验有关的审美，除了借助主体这些方面的专门知识、经验外，还与主体的想像力、理解力特别是逻辑思维能力等因素有很大关系，这种深奥的美就不是任何人都能感受到的。特别是那些固执地认为审美只和形象思维有关，从而把逻辑思维完全摒弃于审美过程之外，否定数学美存在的人，又怎么能对那些体现着人类自由感、力量感的数学理论、公式、图表、方法产生美感呢？

中外美学史上关于崇高美的论述很多，康德认为崇高的特征是无常规形式，即无规律，极荒僻和力量之巨大。康德偏于形式，而对于内容却有所忽略。黑格尔则把形式和内容结合起来，他从客观唯心主义哲学出发，认为崇高是理念大于形式。车尔尼雪夫斯基从唯物主义的立场出发批判了黑格尔的崇高观。他说："更大得多，更强得多——这就是崇高的显著特点。"总之，自然界的崇高首先以其数量上与力量上的巨大引起人们的惊讶和敬赞。它们经常以突破形式美（如对称、均衡、调和、比例等）一般规律的粗砺形态如荒凉的风景、无限的星空、波涛汹涌的磅礴气势，雷电交加的惊

人场面以及直线、锐角、方形、粗糙、巨大，等等（与美的曲线、圆形、小巧、光滑……恰恰相反）来构成崇高的特点。

社会生活中的崇高，要有先进社会力量或数量上的巨大的特点。例如：伟大的二万五千里长征、宏伟的建筑、征服宇宙等都是崇高。艺术中的崇高是把生活中的崇高典型化得来的。传统的美学家们只是感受到了崇高美的现象，不可能揭示反映崇高美的事物的内部之运动变化规律，而数学美的出现便弥补了这一缺陷。例如：天文数学、气象数学、突变理论、经济数学、生物数学、空气动力学、潮汐理论等，都从空间形式和数量关系方面深入揭示了崇高美的内在规律。解决艺术品和社会生活问题的各种数学模型，更是映出了典型化的光辉。因此，从这个意义上讲，数学美是深奥的美、崇高的美。笔者认为，古代哲学家、数学家普洛克拉斯的断言，“哪里有数，哪里就有美”是不全面的，因为数不都是美。但是，随着科学技术的飞速发展，特别是人工智能技术的发展将会证明，哪里有美，哪里必蕴含着数学美，数学美是一切美的根据。

五、数学与美学的结合是历史发展的必然趋势

世界著名科学家钱学森同志在一封信中提出一个观点，他认为数学应该与自然科学和社会科学并列，而称为数学科学。他认为在人类整个知识系统中，数学不应该被看成是自然科学的一个分支，而应提高到与自然科学和社会科学同等重要的地位。数学在自然科学和社会科学中的应用已达到了人们称之为“科学的数学化”的程度。数学方法已经成了一般的科学方法。数学向科学各领域渗透的结果，不仅导致了一系列新的研究领域和交叉学科的建立，使数学已成为某些学科理论的一个重要组成部分，而且数学自身的发展水平也在影响着人们的思维方式，影响着人文科学的进步。

在美学处于尴尬境地的今天，那些明智的美学家们都呼吁“美学需要科学”，因为只有科学才能解决那些使美学家们感到扯不清楚的问题。又由于科学的数学化，所以数学与美学的结合既有利于

数学的发展，又有利于美学的发展。数学美是评价数学理论的重要标志。正如冯·诺意曼说："我认为数学家无论是选择题材还是判断成功的标准主要都是美学的。"数学美是数学发展的内驱动力，正如法国数学家阿达玛说："数学家的美感犹如一个筛子，没有它的人永远成不了发明家。"未来数学发展的方向就是真、善、美的统一。数学方法应用于美学，可以解决美学家们想说又说不清楚的基本理论问题，使美学从现在的定性研究，走向定量的研究，能充分发挥美学的社会效益，实现马克思的"按照美的规律来建造"世界的理想。然而数学与美学的彻底结合不是短时期所能达到的，需要美学家与数学家长期协同研究。优势互补，共创美好的未来，但是像现在这样将数学美摒出美学的殿堂是永远也达不到的。

最后，我们以英国著名数学家罗素的名言作为本文的结尾："数学，如果正确地看待它，不但拥有真理而且还具有至高的美，这是一种雕塑式的冷而严肃的美，这种美既不投合人类之天性的微弱方面，也不具有绘画或音乐的那种华丽的装饰，而是一种纯净而崇高的美，以致能以达到一种只有最伟大的艺术才能显现的那种完美的境地。"

（参考文献和注释略）

［分析］

1. 内容选择

《数学美是深奥的美》是一篇理论性较强的数学思想方法论文。论文的内容是作者针对数学美有争论的问题，系统地论述和论证了数学美是深奥的美、崇高的美。并提出了自己的新见解。

论文内容选择的方向非常重要，作者善于在人们不喜欢的数学美学领域里，选择研究课题，又善于在人们争论的问题中，选择论文题目。这样，使论文内容的选择恰到好处：在美的欣赏离不开逻辑思维；迟到的美是完美的美；最难感受的美是深奥的美、崇高的美；数学与美学的结合是历史发展的必然趋势四个层次上，从不

同角度进行科学地分析、严密地推理，揭示出数学美的实质。

2. 题目推敲

般说来，在数学美学领域里，选择有新意的题目是比较困难的。该文作者多年从事数学美学研究，又善于在人们有争论的问题上进行选题，经过反复推敲，确定以《数学美是深奥的美》为标题及四个分段标题（见论文），准确得体，恰如其分地反映出论文研究的范围和达到的深度，论点正确，富有针对性，抓住了数学美的根本问题。

论文标题与分段标题新颖，为全文展开打下了基础。

3. 创作新意

作者不仅选题有新意，更重要的在于作者能在前人的研究基础上，从发展、提高的角度探求新的理论见解。主要体现在：

(1) 作者善于在人们忽视的数学美领域里选择课题，善于在人们争论的问题上选题，在选题上抓住了关键；

(2) 论点正确，论据充实，论证严密，对数学美有自己独立的新见解，在理论研究上较前更加深刻、系统。

4. 写作技法

论文结构采用通用型。

标题　数学美是深奥的美

分段标题

(一) 美的欣赏离不开逻辑思维

(二) 迟到的美是完美的美

(三) 最难感受的美是深奥的美、崇高的美

(四) 数学与美学的结合是历史发展的必然趋势

鲜明的观点，富有说服力的完美的结构形式，揭示出论文的主旨。

论文的开头，开门见山，研究的理由、目的、背景、观点，写得简洁、确切，自然地引出正文。

在正文写作中，作者在组织好真实而充分的材料即论据的基

础上，言简意赅，严格地遵循逻辑规则，引用名人名言，使论证具有一定的深度和力度。

论文的结尾收得好，以英国著名数学家罗素的名言结尾，使论文前后照应，言简而意无穷。

第四章　数学应用论文

随着我国社会主义现代化建设的深入发展，人们对数学有了新的认识。

数学不仅给予人们各种能力，而且对提高一个民族的科学和文化素质都起着非常重要的作用。

国家的繁荣富强，关键在于高新科技和高效率的经济管理。高新科技的基础是应用科学，而应用科学的基础是数学。这已为各个发达国家的历史所证实。这正如著名数学家华罗庚教授说的：宇宙之大、粒子之微、火箭之速、化工之巧、地球之变、生物之谜、日用之繁等各个方面，数学的重要贡献无处不在。

这里所说的数学应用论文，其内容包括两大类：一类是运用数学知识解决实际问题，一类是对复杂的实际问题，通过建立数学模型，寻求解决问题的方法。

粗略地说，数学模型就是针对或参照某种事物系统的主要特征或数量相依关系，采用形式化的语言概括或近似地表述出来的一种数学结构。

一般认为，数学模型有广义和狭义两种理解。按照广义的理解，一切数学概念、原理和数学理论体系都可以视为数学模型；按照狭义的理解，只有那些特定问题或特定的具体事物系统的数学关系结构才叫做数学模型。

所谓数学模型方法，即把所研究和考察的实际问题或理论问题抽象为数学问题，构造出相应的数学模型，然后通过对数学模型的研究得出原问题的解答的方法。

第一节　论文内容的选择

在第一章里，我们说过，数学应用论文是指数学应用于实际，运用已掌握的数学知识分析、论证数学自身和解决实际问题而写成的文章。可见，撰写数学应用论文，其内容的选择范围是十分宽广的。

一、数学应用于实际

这里着重说明，结合数学教学撰写数学应用论文时，如何选择论文的内容。

1. 学科内部数学的应用

这里是指从不同的角度，在学科自身运用已掌握的数学知识作为工具，解决数学问题，从中选择研究课题，进而确定论文的标题和内容。这样写成的数学应用论文，往往对某些数学应用问题或概念、定理、方法等有所改进、创新和推广，并能体现数学建模的思想方法。

例如：

《多元函数的泰勒公式及其应用》；

《凸函数及其应用》；

《一类条件极值问题的处理》等数学论文，都属于数学分析中的数学应用论文。

2. 学科之间数学的应用

这里是指从不同的角度，运用某学科的数学知识作为工具，解决另一学科的某些问题作为选择课题，进而确定论文的标题和内容。这样写成的数学应用论文，富有创造性，并能体现数学建模的思想方法。例如：

《微积分在天体力学上的应用》；

《矩阵在求递推式数列通项中的应用》；

《数学分析中若干问题的概率论解法》等许多论文都体现了这一点。

3. 数学在实际问题中的应用

这里着重是指按照教学大纲的具体要求，结合教学实际，用数学知识作为工具，解决实际应用问题（包括简单应用、较复杂应用、综合应用），选择课题，进而确定论文标题和内容。这样写成的数学应用论文，对于数学应用于实际，培养学生分析问题、解决问题的能力，具有指导意义。

二、建立数学模型

这里着重说明，数学应用于实际，解决复杂问题需要建立数学模型时，如何选择论文的内容。

复杂问题的解决，常常需要运用基础数学、应用数学、计算数学作为工具，建立数学模型，用数学模型方法求出优化解。可见，论文内容的选择领域是十分广阔的。

1. 从模型的应用领域选择论文内容

这里所说的从数学模型应用领域选择论文的内容，即从模型所属学科进行选择研究课题，进而确定论文的标题和内容。例如：

人口模型；

交通模型；

环境模型；

生态模型；

城镇规划模型；

水资源模型；

再生资源利用模型；

污染模型。

范畴更大一些则形成许多边缘学科，如生物数学、医学数学、地质数学、数量经济学、数学社会学等。

从上述范围内，提出具体问题，用数学模型方法，使原问题取

得最优解答，从而数学应用论文的标题、内容就具体确定了。

2. 从建立模型的数学方法选择论文内容

这里所说的从建立数学模型的数学方法选择论文的内容，即从模型所属数学分支进行选择研究课题，进而确定论文的标题和内容。例如：

初等数学模型；

几何模型；

微分方程模型；

图论模型；

马氏链模型；

规划论模型等许多数学模型属于数学某一分支。

在上述类型中，提出具体问题，用数学模型方法，使原问题取得优化解答，从而数学应用论文的标题、内容就具体确定了。

随着高新科技与数学科学的发展，尽管数学建模涉及的面广、难度大。但我国的数学专家、教授、博士、学者在优化、控制与统筹，预测与管理，信息处理，大型工程，资源开发与环境保护，工业与农业，军事与国防等许多领域里，选择了研究课题，确定了研究方向，取得了惊人的成就。发表了许许多多高水平的、具有创造性理论价值和应用价值的数学应用论文，引起国内外的关注。

第二节　论文的写作

从数学应用论文内容的选择上不难看出，数学应用论文分为：简单型数学应用论文和复杂型数学应用论文，便于论文创作。

本节对这两种类型数学应用论文写作，进行具体分析、研究。

一、简单型应用论文的写作

这里所说的简单型数学应用论文，是属于广义数学模型范畴，即结合数学教学，数学概念、定理、公式的应用，特别是运用数学知

识分析、解决实际问题而写成的论文。在写作时，应抓住以下几个要点：

1. 论文的一般形式可选择数学教学研究论文的形式

2. 论文要突出数学应用于实际的教学目标

数学应用于实际的教学内容，大体归结为：简单应用、较复杂应用和综合应用。

简单应用的论文，能突出对数学公式和概念等知识回忆，在标准情境中作识别，通过模仿用常规方法和基本模式解决比较直接、简单的实际问题；

较复杂应用的论文，能够在分析问题的已知条件的基础上，使用某一个知识点或技能，合理运用基本的模式和常规方法，直接解决一些实际问题；

综合应用的论文，能够对在新的情境下出现的结构较复杂的实际问题进行全面剖析，并将实际问题分解、组合，弄清其内部关系，通过应用多个知识点和多种技能，解决较复杂的实际问题。

3. 论文要揭示出数学应用于实际的规律

在突出数学目标的基础上，要从一定的理论高度上，进行分析、探讨、揭示出数学应用于实际的规律性的东西。

4. 论文要突出建立数学模型的思想方法

撰写简单型数学应用论文，要求深入探索、思考、善于观察、富于联想、转化、分解、组合、从数量关系或空间形式上进行抽象、提炼出涉及到的实体对象间具有的必然关系，问题的解决一般采用确定性数学模型。这类模型的形式可以是各种各样的方程式、关系式、网络图等。因此，撰写简单型数学应用论文时，要突出体现数学模型的思想方法。

二、建模论文的写作

这里所说的复杂型数学应用论文，是指建立数学模型，用数学模型方法求解的一类论文。

大家知道，数学应用于实际，解答复杂的实际问题时，往往需要基础数学、应用数学、计算数学作为工具，建立数学模型，用数学模型方法求解。特别是近年来，随着电子计算机的普及和各门科学的数学化，数学模型方法更为广泛地应用于自然科学与社会科学的众多领域中。

撰写此类论文时，应抓住以下几个要点：

1. 要突出论文的结构及其特性

(1) 论文的结构

复杂型数学应用论文的结构，通常采用：

标题

署名

[illegible]

关键词

问题的提出与分析

模型建立与模型分析

模型优缺点与改进

参考文献

这与前面讲的论文结构是一致的。

“问题的提出与分析”，可视为论文的“引言”或论文的开头；“模型建立与模型分析”可视为正文，论文的主旨；“模型优缺点与改进”可视为论文的结论。

显然，根据不同的具体实际问题，参考文献上面的三个层的含义，还可以采用类似的术语。

(2) 论文的几个特性

撰写这类论文时，要突出论文的几个主要特性：

① 主题的鲜明性；

② 高度的抽象性；

③ 结果的精确性；

④ 功能的预见性。

其含义是：论文的主题具有鲜明性是说，一篇数学应用论文，用了哪些知识，解决了什么样的实际问题，知识应用上有哪些特点，都需清楚明了；高度的抽象性是说，数学模型是一种形式化的抽象结构，为建立模型，先舍弃所研究对象的具体内容，只考虑数量关系和空间形式，并引用符号表达，作进一步抽象；论文结果具有精确性，是指用数学模型得到的论断是精确（包括概率的）的。这一特性的依据在于数学推理的逻辑严谨性和运算的确定性；论文具有功能的预见性，是指数学模型的功能不在于描述事物过去和现在状态，而在于预测事物未来的状态和变化，常借助于数学模型事先推断某现象的存在，再通过观察、实验、上机计算、推证，去确认数学模型预见的正确性。这是现代科研的一种重要手段。

2. 要掌握建立数学模型的方法、步骤

先看例子　随机存储策略

商店在一周中的销售量是随机的。每逢周末经理要根据存货的多少决定是否订购货物，以供下周的销售。适合经理采用的一种简单的策略是制定一个下界 m 和一个上界 M。当周末存货不少于 m 时就不订货；当存货少于 m 时则订货，且订货量使得下周初的存货量达到 M。这种策略称为 (m,M) 随机存储策略。

我们只考虑费用：订货费、储存费、缺货费、商品购价格，存储策略的优劣，以总费用为标准。显然，总费用（在平均意义下）与 (m,M) 策略、销售量的随机规律、单项费用大小有关。

为方便起见，时间以周为单位，商品数量以件为单位。

模型假设

(1) 每次订货费为 c_0（与数量无关），每件商品购进价为 c_1，每件商品一周的储存费用为 c_2，每件商品的缺货损失为 c_3。c_3 相当于售出价，应有 $c_1<c_3$；

(2) 一周的销售量 r 是随机的，r 取值很大，可视为连续变量，其密度函数为 $p(r)$；

(3) 记周末的存货量为 x，订货量为 u，并且立即到货，于是周

初的存货量为 $x+u$；

(4) 一周的销售量是集中在周初进行的，即一周的储存为 $x+u-r$，不随时间改变。

建模与求解

按上述条件，显然，

当 $x\geq m$ 时，$u=0$

$x<m$ 时，$u>0$ 令 $x+u=M$

确定 m、M 应以总费用最小为标准。

由于销售 r 是随机的，从而储存量和缺货量亦为随机的，致使一周的储存费、缺货量亦是随机的，故知目标函数应取一周总费用的期望值，即长期经营中每周费用的平均值，即平均费用。

由假设条件得平均费用为

$$J(u)=\begin{cases}c_0+c_1u+L(x+u) & u>0\\ L(x) & u=0\end{cases} \tag{1}$$

其中

$$L(x)=c_2\int_0^x(x-r)p(r)\mathrm{d}r+c_3\int_x^{+\infty}(r-x)p(r)\mathrm{d}r \tag{2}$$

当 $u>0$ 时，求 $J(u)$ 的最小值

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}u}=c_1+c_2\int_0^{x+u}p(r)\mathrm{d}r-c_3\int_{x+u}^{+\infty}p(r)\mathrm{d}r \tag{3}$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}u}=0$， 记 $x+u=M$， 而 $\displaystyle\int_0^{+\infty}p(r)\mathrm{d}r=1$

可得

$$\frac{\int_0^M p(r)\mathrm{d}r}{\int_M^{+\infty}p(r)\mathrm{d}r}=\frac{c_3-c_1}{c_2+c_1} \tag{4}$$

这就是说，令订货量 u 加上原来的存量 x 达到(4)式所示的 M，可使平均费用最小 $\left(\dfrac{\mathrm{d}^2J}{\mathrm{d}u^2}>0\right)$。

下面确定 m

当存货量为 x 时，若订货，则由式(1)在 M 策略下，平均费用为

$$J_1 = c_0 + c_1(M - x) + L(M)$$

若不订货，则平均费用为

$$J_2 = L(x)$$

当 $J_2 \leqslant J_1$ 时，即

$$L(x) \leqslant c_0 + c_1(M - x) + L(M) \tag{5}$$

时应不订货，记

$$I(x) = c_1 x + L(x) \tag{6}$$

则不订货的条件式(5)可表为

$$I(x) \leqslant c_0 + I(M) \tag{7}$$

而式(7)中 $c_0 + I(M)$ 为已知数，于是 m 的方程为

$$I(x) = c_0 + I(M) \tag{8}$$

根据模型式(1)、式(2)所确定的 (m, M) 策略，由式(4)、式(6)、式(8)给出，当 $c_0, c_1, c_2, c_3, p(r)$ 给定后，m, M 可以解出。

从这个例子，可以看出，建立数学模型的基本过程，是一个进行数学抽象的过程。由此，可以归纳出建模的一般方法、步骤：

(1) 明确目标；

(2) 对系统进行调查，去粗取精，去伪存真，找出主要因素，确定主要变量；

(3) 找出各种关系；

(4) 明确系统的约束条件；

(5) 根据有关学科的知识，用数学符号、数学表达式表示事物对象及其关系；

(6) 简化表达形式，求解并进行检验。

数学模型专家姜启源教授在《数学模型》一书中，给出建模一般步骤如图 4-1 所示。

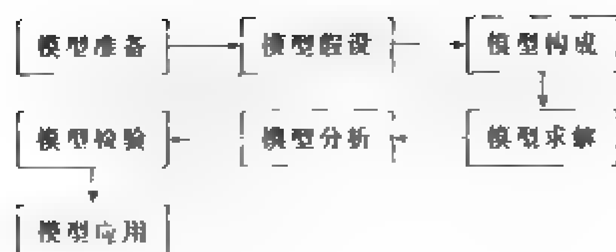


图4 1

模型准备：

首先了解问题的实际背景，明确建模的目的，搜集建模必要的各种信息，如现象、数据等，尽量弄清对象的特征，并初步确定建立哪一类模型；

模型假设：

根据对象的特征和建模的目的，对问题进行必要的、合理的简化，用精确的语言、合情合理地作出假设，这是建模的关键一步。

一般说来，一个实际问题不经过简化假设就很难翻译成数学问题，即使可能，也很难求解。不同的简化假设会得到不同的模型。假设作得不合理或过分简单，会导致模型失败或部分失误，因而应修改和补充假设；假设作得过分详细，即各方面因素都考虑进去，可能使你很难做下一步工作。

通常作假设的依据，一是出于对问题内在规律的认识，二是来自对数据或现象的分析，也可以是二者的综合。要充分发挥想像力和判断力，善于抓住主要因素，尽量将问题线性化、均匀化，用精确语言写出假设。

模型构成：

根据所作的假设，分析对象的因果关系，利用对象的内在规律和数学工具，构造各个量之间的等式或不等式或其他数学结构。

模型求解：

可以采用解方程、图解法、证明定理、逻辑运算、数值计算等数学方法，特别是计算机技术。

模型分析：

对模型解答进行数学上的分析，有时要根据问题的性质分析变量间的依赖关系或稳定状况；有时是根据所得结果给出数学上的预报；有时可能给出数学上的最优决策或控制。总之，还要进行误差分析，或稳定性、灵敏性分析等。

模型检验：

把数学上分析的结果翻译回到实际问题，并用实际的现象、数据与之比较，检验模型的合理性和适用性。这一步对于建模的成败是非常重要的。

模型检验的结果若不符合实际情况，问题通常出在模型假设上，或出在数学关系式上。此时，应修改、补充假设或修改数学关系式，重建模型，直到满意。

一般说来，对一个具体的实际问题，要建立一个比较合适的数学模型，不是一件容易的事情，即使建立了模型，求解难度也很大。这就要求作者刻苦钻研，除了掌握本行专业外，还必须具有较宽的知识面，并不断提高自己理解实际问题的能力、抽象分析的能力、运用数学工具的能力和通过实践加以验证的能力。灵活运用上述建立数学模型的思想方法，一定会创作出高水平的数学应用论文。

第三节　例文分析

例文 7

一类条件极值问题的处理

一、不等式与规划

1. 问题的提出

在 1983 年全国省市自治区联合数学竞赛的第一试试题中有这么一道题（第 5 题，选择题）：

题目　已知函数 $f(x)=ax^2-c$，满足

$$4\leqslant f(1)\leqslant -1,\qquad 1\leqslant f(2)\leqslant 5$$

那么，$f(3)$应满足：

(A) $7\leqslant f(3)\leqslant 26$　　　(B) $-4\leqslant f(3)\leqslant 15$

(C) $-1\leqslant f(3)\leqslant 20$　　　(D) $\frac{28}{3}\leqslant f(3)\leqslant \frac{35}{3}$

标准答案应当是“(C)”。这一道题批改时，对的给分，不对的给零分，工作是比较顺利迅速的。但问题是：原来印好的试卷为“(A)　$-7\leqslant f(3)\leqslant 26$”。在临考前一天全国数学竞赛试题委员会才从合肥向全国各省市数学竞赛委员会发出急电，宣布将其中的“(A)”改为“$7\leqslant f(3)\leqslant 26$”。形成如上一开始所述的不等式问题。无论是发电报前的竞赛委员会的出题人或批改试卷的各省市的老师们，以及广大教师和数学工作者中，有些同志对于上述问题的提法与答案，产生了一些质疑和探讨。

这些质疑问题正好处在初等数学与高等数学之间，是一个值得探讨的有趣问题。

例如，对上述第5题，先不考虑选题中的可能答案，而把它作为求 $f(3)$应满足的范围

$$m\leqslant f(3)\leqslant M$$

来求出 m,M。有两种解答方式：

方式(甲)：因为 $f(1)=a-c$，$f(2)=4a-c$，解出

$$a=\frac{1}{3}[f(2)-f(1)]$$

$$c=\frac{1}{3}[f(2)-4f(1)]$$

故而

$$f(3)=9a-c=\frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1)$$

由 $-1\leqslant f(2)\leqslant 5$，知

$$-\frac{8}{3}\leqslant \frac{8}{3}f(2)\leqslant \frac{40}{3}$$

由　$4\leqslant f(1)\leqslant -1$，知

$$\frac{5}{3}\leqslant -\frac{5}{3}f(1)\leqslant \frac{20}{3}$$

从而　$-1\leqslant f(3)\leqslant 20$。

这个解答给出了解答(C)是正确的。

方式(乙)：假若由 $f(1)=a-c$，$f(2)=4a-c$，用 $f(1)$，$f(2)$ 的不等式条件，解出 $0\leqslant a\leqslant 3$，$1\leqslant c\leqslant 7$，从而以此代入 $f(3)=9a-c$，就可以得到 $-7\leqslant f(3)\leqslant 26$。

因此用方式(乙)的同志认为紧急电报可以不打，原试卷如不更改，凡答(A)的也可以认为正确。那么问题出在哪儿呢？

事实上，方式(乙)的作者把原结果放宽了。因为 $[-1,20]\subset[-7,26]$。故这个估计并不是错的，而是“松”了。例如要用一些资料来判断某一个人的信息，甲说他是中国人，乙说他是北京人，前者稍“粗”，后者稍“细”，也即甲的结果“宽”，乙的结论“紧”。注意，如今题目中的(A)是 $7\leqslant f(3)\leqslant 26$，而 $[7,26]$ 并不包括 $[-1,20]$，故而选(A)当然是错。

估算 $f(3)$ 时，既然可得“松”与“紧”的两结果，那么，再问上述(C)是否已是最紧的结果了？即区间 $[-1,20]$ 不可能再压缩了吗？

2. 问题的转化

原问题中有一个二次函数 $f(x)=ax^2-c$，按照原来的提法 x 为变数，系数 a、c 为常数，但 a、c 并非绝对常数，而实质上是满足不等式关系(在一定范围内变化)的“参”数。可将原问题转化成如下等价形式：

形式 I　已知 a、c 满足

$$-4\leqslant a-c\leqslant 1\quad,\quad -1\leqslant 4a-c\leqslant 5 \tag{1}$$

那么

$$f=9a-c \tag{2}$$

应满足 $m\leqslant f\leqslant M$，试求出最小的 m 与最大的 M。

或将上述问题变为：

形式Ⅱ$_1$　已知a、c满足(1),求(2)中f的极小值m。

形式Ⅱ$_2$　已知a、c满足(1),求(2)中f的极大值M。

显,形式Ⅱ$_1$与Ⅱ$_2$联合就是形式Ⅱ,即与原问题等价。

这里可以看到,原问题的原来变数x的作用已经完结。实质上,在形式Ⅰ或Ⅱ中,参数a,c实际上就是变数。于是,不妨按习惯将a与c改写为x_1与x_2,于是可变为

形Ⅲ$_1$　变数x_1、x_2满足

$$-4\leqslant x_1-x_2\leqslant -1 \quad , \quad -1\leqslant 4x_1-x_2\leqslant 5 \tag{3}$$

记

$$f=9x_1-x_2 \tag{4}$$

求f的极小值m。

形式Ⅲ$_2$　变数x_1,x_2满足(3),求(4)中f的极大值M。

由与原问题等价的形式Ⅲ(Ⅲ$_1$与Ⅲ$_2$)看来,这是一类条件极值问题。

由(3)易知x_1,x_2此时有$x_1\geqslant 0$,$x_2\geqslant 0$(可解出$0\leqslant x\leqslant 3$,$1\leqslant x_2\leqslant 7$)。而形式Ⅲ还可再转化成如下形式:

形式Ⅳ$_1$　变数x_1,x_2满足

$$\mathscr{D}: \begin{cases} x_1-x_2+1\leqslant 0 \\ -x_1+x_2-4\leqslant 0 \\ 4x_1-x_2-5\leqslant 0 \\ -4x_1+x_2-1\leqslant 0 \\ x_1\geqslant 0 \\ x_2\geqslant 0 \end{cases} \tag{5}$$

求(4)中f的极小值$m=\min\{f\}$。

形式Ⅳ$_2$　实数x_1、x_2满足(5),求(4)中f的极大值$M=\max\{f\}$。

此处条件(5)称为约束条件,而函数(4)称为目标函数。

一般来说,如果变数x_1,x_2,…,x_n满足约束条件:

$$\begin{cases} g_1(x_1,x_2,\cdots,x_n) \leqslant 0 \\ g_2(x_1,x_2,\cdots,x_n) \leqslant 0 \\ \quad\cdots\cdots \\ g_m(x_1,x_2,\cdots,x_n) \leqslant 0 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{6}$$

求目标函数

$$f = f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{7}$$

的极值问题(求 $\min\{f\}$ 或 $\max\{f\}$),就是一个数学规划问题。如果其中约束(6)与目标(7)均关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为一次函数(线性关系)时,则此种规划便称之谓线性规划问题。

这样一来,我们就弄明白了:原来与我们竞赛题的原相等价的形式Ⅳ(Ⅳ₁与Ⅳ₂)就是一个典型而特殊(2个非负变数,4个约束不等式)的线性规划问题。

3. 问题的解决

如今的问题是求在约束 $\mathscr{D}$ 上的目标函数

$$f(x_1,x_2) = 9x_1 - x_2$$

的最大值 M 与最小值 m(当然有 $m\leqslant f\leqslant M$)。

如图 4-2 所示,约束区域为由 $p_1p_2p_3p_4$ 组成的平行四边形区域 $\mathscr{D}$。考虑等斜线

$$9x_1 - x_2 = f$$

这个斜率为 9 的直线族越往左函数值 f 越变小,反之越向右时,$f(x_1,x_2)$越大。因此,f 必在 $\mathscr{D}$ 的顶点上达到极值,即在 p_1 上达到最小,而在 p_3 上达到最大,有

$$m = \min\{f\} = f(p_1) = f(0,1) = -1$$

$$M = \max\{f\} = f(p_3) = f(3,7) = 20$$

故而获得

$$-1 = \min\{f\} \leqslant f \leqslant \max\{f\} = 20$$

这已是一个不可改进的结果。

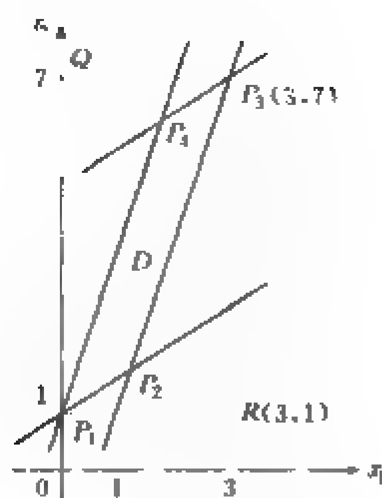


图 4-2

如果当初先由平行四边形区域 $\mathscr{D}$ 算出 x_1,x_2 的范围，当然有 $0\leqslant x_1\leqslant 3, 1\leqslant x_2\leqslant 7$，而这是一个矩形区域 S，它由 P_1RP_3Q 组成，是 $\mathscr{D}$ 向两轴的正交投影，显然 $\mathscr{D}\subset S$，而 $f(x_1,x_2)$ 在 S 上的极值也是在 S 的顶点上达到，有

$$m'=\min_{x_1,x_2\in S}\{f\}=f(Q)=f(0,7)=-7$$

$$M'=\max_{x_1,x_2\in S}\{f\}=f(R)=f(3,1)=26$$

从而知 f 值在 S 上满足 $-7\leqslant f\leqslant 26$，这里清楚地看到了此两结果的"松"、"紧"关系：

$$(x_1,x_2)\in\mathscr{D}\subset S;\ f\in[-1,20]\subset[-7,26]。$$

这样，我们就求到了 f 满足不等式 $m\leqslant f\leqslant M$ 中最大的 m 为 -1，而最小 M 为 20。这就宣布了方式（甲）的做法已是最"紧"的结果，不可改进。而方式（乙）的结果是"松"化了的，因而不是最佳答案。如果接受了电报更改之后的话，则原问题的解答只能是"(C)"，而且已是最优的唯一的答案。

4．问题的引申

对于一般规划问题，至今尚未研究透彻，还没有一般的解法，将因问题的情况而具体分类研究而谋求解决。但对于线性规划问

题来说，理论上讲已有 种方法叫做单纯型方法，是运用线性代数里换“基”的方法来“迭代”计算的，它可以解决规划为线性时的 ·切问题。正如用克莱姆法则可以解决当系数行列式非零时，且变数与方程个数相同时的线性方程组问题 ·样。但计算程序与计算量均较复杂，将随变数的增多而增繁。此处因为变数只有两个，即用图解法（例 3 从略）。这种图解法来处线性规划问题的内容，在高中生或大学生中开讲座课是大有益处的。

二、一般条件极值问题

对于附有条件限制的极值问题，·般称为条件极值问题，其一般形式为等号约束

$$\varphi_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \tag{1}$$

$$(k=0,1,2,\cdots,m;\quad m\leqslant n)$$

的限制下，求目标函数

$$f=f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{2}$$

的极值（极大或极小）。

上述不等式约束下求目标函数极值的所谓规划问题，可以引进适当的变量（叫松弛变量），可以等价地化为某种形式的等号约束下的目标函数求极值问题。所以，规划问题当然包括特殊形式的线性规划问题在内，是一类特殊的条件极值问题，也有着一类特殊处理的方法。例如，通常的单纯型方法或变数只有两个时的图解法等。

那么，对于一般的条件极值问题，如何求解呢？

如果 m 个等式约束方程可以解出

$$x_k=\psi_k(x_{m+1},\cdots,x_n)\qquad k=1,2,\cdots,m$$

则以此代入目标函数有

$$\begin{aligned}f&=f(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_m,x_{m+1},\cdots,x_n)\\&=F(x_{m+1},\cdots,x_n)\end{aligned}$$

于是求函数 f 的条件极值问题就转化为求函数 F 的无条件极值

问题了。但是一般情形下，要从等号约束方程中解出 $x_1, \cdots, x_m$ 是较困难或很麻烦的，有时甚至是不可能的。因此，上面的途径往往行不通。

下面引进一种方法叫做拉格朗日乘子法。可免去解等号约束方程的困难。又可把条件极值问题化为求无条件极值问题的稳定点问题。求出稳定点后，可根据所论实际问题的特性来判定哪些稳定点为条件极值问题的解。

引进函数

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)$$

$$= f(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{3}$$

称它为条件极值问题的拉格朗日函数，其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 为拉格朗日乘子，那么，有

定理　设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$\varphi_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$k=1,2,\cdots,m$ ($m<n$) 在以点 $P(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ 为内点的区域 D 内连续可微，P 为满足条件(1)，且使函数(2)取得极值的点，若矩阵

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

的秩为 m，则存在 m 个常数 $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \cdots \lambda_m^0$，使得 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0, \lambda_1^0, \cdots, \lambda_m^0)$ 为拉氏函数 L 的稳定点，即 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \cdots, \lambda_m^0)$ 为下述 $n+m$ 个方程的方程组的解：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}+\lambda_2\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}+\cdots+\lambda_m\dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_1}=0\\
\dfrac{\partial f}{\partial x_2}+\lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}+\lambda_2\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}+\cdots+\lambda_m\dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_2}=0\\
\cdots\cdots\\
\dfrac{\partial f}{\partial x_n}+\lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}+\lambda_2\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_n}+\cdots+\lambda_m\dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_n}=0\\
\varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0\\
\varphi_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0\\
\cdots\cdots\\
\varphi_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0
\end{cases}
$$

证　为简便，仅证 $n=3,m=2$ 的情形。

设 $P(x_0,y_0,z_0)$ 为函数 $f(x,y,z)$ 在限制条件

$$
\begin{cases}
\varphi(x,y,z)=0\\
\psi(x,y,z)=0
\end{cases}
\tag{4}
$$

下的条件极值点，且

$$
\left.\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(y,z)}\right|_P,\ \left.\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(z,x)}\right|_P,\ \left.\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)}\right|_P
$$

不全为 0，则存在常数 λ_0,μ_0 使得 $(x_0,y_0,z_0,\lambda_0,\mu_0)$ 为拉格朗日函数。

$$
L(x,y,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z)
$$

的稳定点，或说 $(x_0,y_0,z_0,\lambda_0,\mu_0)$ 为下述方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}+\mu\dfrac{\partial \psi}{\partial x}=0\\
\dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}+\mu\dfrac{\partial \psi}{\partial y}=0\\
\dfrac{\partial f}{\partial z}+\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}+\mu\dfrac{\partial \psi}{\partial z}=0\\
\varphi=0\\
\psi=0
\end{cases}
$$

的解。

不妨设$\dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(y,z)}\neq 0$，由隐函数组定理可知，方程组 $\varphi=0,\psi=0$ 在 $P(x_0,y_0,z_0)$附近确定唯一连续可微隐函数组

$$\begin{cases}y = y(x)\\ z = z(x)\end{cases} \tag{5}$$

使得

$$\begin{cases}\varphi(x,y(x),z(x)) = 0\\ \psi(x,y(x),z(x) = 0\end{cases} \tag{6}$$

且

$$y_0 = y(x_0),z_0 = z(x_0)$$

把式(5)代入 $f(x,y,z)$中去，得

$$F(x) = f(x,y(x),z(x))$$

由假设点 P 为在条件(4)下 $f(x,y,z)$的条件极值点，于是 x_0 为 $F(x)$的无条件极值问题的稳定点。所以

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x=x_0} = 0$$

即

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_P + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_P \cdot \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_P \cdot \left.\frac{\partial z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = 0 \tag{7}$$

在式(6)中的两个等式对 x 求导，在 x_0 处有

$$\begin{cases}\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_P + \left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_P \cdot \left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} + \left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_P \cdot \left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = 0\\ \left.\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right|_P + \left.\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\right|_P \cdot \left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} + \left.\dfrac{\partial\psi}{\partial z}\right|_P \cdot \left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = 0\end{cases} \tag{8}$$

用 λ 与 μ 分别乘式(8)中的两式，再与式(7)式相加得

$$\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_P + \lambda\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_P + \mu\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_P\right)$$
$$+ \left(\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_P + \lambda\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_P + \mu\left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_P\right)\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$$

$$+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\bigg|_P+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z}\bigg|_P+\mu\frac{\partial\psi}{\partial z}\bigg|_P\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_0}=0 \tag{9}$$

由于$\left.\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(y,z)}\right|_P\neq 0$，因而一定能求得 λ_0 与 μ_0 使得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial y}\bigg|_P+\lambda_0\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\bigg|_P+\mu_0\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\bigg|_P=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial z}\bigg|_P+\lambda_0\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\bigg|_P+\mu_0\dfrac{\partial\psi}{\partial z}\bigg|_P=0\end{cases} \tag{10}$$

于是由式(9)式得出

$$\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_P+\lambda_0\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bigg|_P+\mu_0\frac{\partial\psi}{\partial x}\bigg|_P=0 \tag{11}$$

由式(10)与式(11)、以及 $\varphi|_P=0$，$\psi|_P=0$，定理证毕。

例 1　限定长方体的对角线长度一定，求其容积最大。

解　设 x,y,z 表其长、宽、高，容积为 V，对角线长一定为 d，那么，有

约束条件为　$x^2+y^2+z^2=d^2$

目标函数　　$V=xyz$

于是引进拉格朗日(简称拉氏)乘数 λ，有拉氏函数

$$L=xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-d^2)$$

用拉氏方法，令

$$\frac{\partial L}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial L}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial L}{\partial z}=0,$$

得

$$\lambda=-\frac{1}{2}\frac{yz}{x},\quad \lambda=-\frac{1}{2}\frac{xz}{y},\quad \lambda=-\frac{1}{2}\frac{xy}{z}$$

故有

$$x=y=z=\frac{d}{\sqrt{3}}$$

于是 $\lambda=-\frac{d}{2\sqrt{3}}$，得

$$(x,y,z)\quad\left(\frac{d}{\sqrt{3}},\frac{d}{\sqrt{3}},\frac{d}{\sqrt{3}}\right)$$

这正是本题的解答。

例 2　求在条件

$$x^2+y^2+z^2=1$$
$$x+y+z=0$$

约束下，目标函数

$$u=xyz$$

的极值。

解　引进拉氏乘数 λ 与 μ，有拉氏函数为

$$L=xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)+\mu(x+y+z)$$

于是按拉氏方法，令

$$\frac{\partial L}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial L}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial L}{\partial z}\quad 0$$

得 $x=y$，由 $y\neq0$ 得 $x=2\lambda$，最终得

$$\lambda=\pm\frac{1}{2\sqrt{6}}$$

于是得稳定点为

$$M_1\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}\right),M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right).$$

判定 M_1,M_2 是极值点，何种极值点？为此注意约束条件

$$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\x+y+z=0\end{cases}$$

得

$$\Gamma:\begin{cases}y=y(x)\\z=z(x)\end{cases}$$

因此，

$$u=x\cdot y(x)\cdot z(x)=u(x)$$

$$\frac{du}{dx}\quad yz+zx\frac{dy}{dx}+xy\frac{dz}{dx}$$

再由 Γ

$$\begin{cases} x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z = 0 \\ \mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z = 0 \end{cases}$$

得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{z - x}{y - z}, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{x - y}{y - z}(y \neq z)$$

故

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = yz + 2x^2$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} = z\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + \mathrm{d}x = 6x$$

显然，

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\right|_{M_1} > 0$$

故 M_1 为极小点。又

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\right|_{M_2} < 0$$

故 M_2 为极大点。

[分析]

1. 内容选择

《一类条件极值问题的处理》这篇数学应用论文，是作者由一道数学竞赛题的质疑和探讨，给出了完美的解答，不仅缓解了全国数学委员会向各省市数学竞赛委员会发“急电”的局面，而且由此联想，利用灵感思维，十分巧妙地选择了该论文的内容。

论文内容选择、安排恰到好处。由问题的提出 问题的转化 问题的解决 问题的引申，问题的分析、论证和归纳，其选择内容涉及到不等式问题、规划问题、数学分析、多元函数极值问题。内容选择的鲜明、典型、集中、深刻，突出了高等数学与初等数学相结合的指导思想，体现出数学各分支内容相互渗透这一数学新特点。具有一定的理论价值和实用价值。

2. 题目推敲

作者在选择论文内容前后过程中，精心琢磨，锤炼，紧扣选择的论文内容，确定了以《一类条件极值问题的处理》为标题及分段标题（见例文），揭示出论文主旨内容和范围。做到了确切、简洁、醒目。借助灵感选题，富有个性和创造性。

一般说来，凡是大家熟知的内容，知识面既广又深，确定论文题目都是非常困难的。该文作者能在这种情况下，确定的论文题目，令人叫好。如果改用其他题目，就难以体现上述特点的。

3. 创作新意

作者不仅选题新颖，而且在内容安排上有独立的新见解，创作上富有新意，主要体现在：

(1) 用不同的方法对赛题给出完美的解答；

(2) 突出高等数学与初等数学结合的有效途径；

(3) 数学学科、各分支内容渗透自然、吻合，体现出渗透是数学的新特点；

(4) 多元函数极值定理，一般教材证明简略，本文给出严格证明。

4. 写作技法

论文结构采用通用型：

标题　一类条件极值问题的处理

分段标题

(一) 不等式与规划

1. 问题的提出

2. 问题的转化

3. 问题的解决

4. 问题的引申

(二) 一类条件极值问题

富有科学性、逻辑严谨性，恰如其分且完美的结构形式，使论文成为有机的整体，使熟悉的内容在此文中显得格外新鲜。

文章的开头，开门见山，自然引人正文，结尾即正文结束部分，干净利落，与开头呼应。

正文以分析、综合、归纳、演绎为主要方法，并善于运用数学语言或符号加以逻辑表达，层次清晰、富有数学建模思想。作者语言富有个性、生动有趣，选材典型、富有启发性，使论文主旨内容集中、鲜明，引人入胜。

论文在高、初等数学结合、数学有关学科间渗透的有效途径，具有一定的理论价值和实用价值；对教学研究、科研起着重要作用；特别是作者高水平的创作技法，对撰写数学论文具有指导意义。

例文 8

系统工程在长清县农牧业最优结构布局中的应用

摘要　本项目主要是寻求一个全县规模的种植业和畜牧业的最优布局和结构。为此，根据实际问题分别在旱、涝不同气候条件下确立了四个大型线性规划模型和种植业与畜牧业相结合的模型(具有三千余个变量和百余个约束条件)。通过上机计算，求得相应的最优布局和最优结构。从不同气候因素下各自最优方案中，利用对策论，选出了最优对策方案。

对于价格的影响，通过灵敏度分析得到了对方案作相应调整的信息。农牧结合模型的计算结果，提供了进一步调整种植业布局和畜牧业结构以提高总体功能的途径。

农业生产过程是一个自然再生产和经济再生产交织在一起的复杂过程，既受技术条件、经济因素的干预，又受自然条件的制约。因此，目前单纯依据资料进行定性分析，已不适应农业生产的需

要，定量、最优已成为组织、管理农业生产的迫切要求。这个在农业生产中想要解决而难于解决的问题，正是农业系统工程所面临的任务。

从 1982 年开始，我们应用系统工程的方法对长清县的农牧业结构布局进行了定量分析与研究，最后建立了最优化的数学模型。根据所得的最优解，我们对该县的农牧业结构布局提出了若干可行的有价值的意见。

长清县是济南市辖县，南依泰山，北临黄河，总面积为 1 183 平方公里，总耕地面积为 63 万亩，地形复杂，易涝、易旱，生产条件较差。全县主要土壤类型是褐土、潮土和棕壤土。可利用水资源为 27 963 万立方米。长清县属于暖温带季风区中的大陆性气候，四季变化明显，春季干旱多风，夏季炎热多雨，秋季温和凉爽，冬季雪少干冷。

依据长清县种植业、畜牧业自然条件、经济技术因素，不增加投入而索取最佳经济效果，是本模型所追求的首要目标。

一、建立模型

1. 问题分析　问题是寻求种植业、畜牧业的最优结构。种植业的结构体现在作物布局上，即作物的接茬关系（时间分布）和田间布局（空间分布）。为了用数学模型刻画，我们将不同作物的接茬关系，按照当地实际情况和两年接茬周期，组成所有可行的组合，不同的组合在各类土地上的分布面积，体现了种植业的结构。对土地分类，考虑了不同的地形、土壤和水浇条件等因素。这样，共得到 83 种不同的作物组合和 37 种不同的土地。我们确定 83 种不同作物组合在 37 种土地中的种植面积为待定变量。共 83×37＝3071 个变量。每给定一组变量的值便可确定一个种植业结构。畜牧业的结构体现在各畜群种类的存养量上，于是确定各畜类存养量为变量，根据不同的地形和当地畜群种类确定 52 个变量。

最优的标准是在一定条件下种植业、畜牧业的纯收益最大。目

标函数确定为纯收益。根据当地接茬两年一个周期的特点，种植业目标函数系数为各作物组合每亩两年纯收益（亩产值减去亩成本），畜牧业目标函数系数为各畜群种类每头（只）平均年纯收益、在农牧模型中为两件纯收益）。这样，目标函数为一线性函数。

最优结构除了要使纯收益最大外，还要满足一些要求。我们考虑了社会需要、国家征购任务、口粮、储备粮、生产粮、存储能力、销路、加工能力、生产能力、生态环境、农牧业本身发展规律等方面，形成了 100 多个约束条件。这些条件皆为线性函数。

根据不同的气象、黄河洪水因素等对种植业的影响，我们对长清县种植业分别建立了平年、旱年、涝年和旱涝年四个线性规划模型。

为了综合考虑种植业和畜牧业的最优结构，我们建立了二者相结合的农牧模型，除了它们本身的约束条件外，还把二者在肥料、饲料、畜力等方面的制约关系作为约束条件列入。

为考虑对大自然的斗争策略，我们又利用不同气象因素下的四个最优方案，建立了对策模型，求出最优策略。

市场价格的浮动，影响农、牧结构，但市场价格稳定性太差，为避免将这种不稳定性带入模型，我们在建立目标函数时，未采用市场价格，而是用了国家牌价。对市场价格的影响，我们作了灵敏度分析。

2. **符号模型**　通过对实际问题的分析，将以上建立的各种数值模型，用符号模型统一表示为一般线性规划模型：

$$\max f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$s.t.\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

式中：$n=3123$。 $m=123$。

二、数据来源

数据的正确统计，是应用数学模型成败的关键。种植业和畜牧业数学模型中的数据主要分投入、产出和约束等三大部分。种植业产出包括品种和数量；投入部分包括种子、农药、机械、电力、畜力和肥料等。畜牧业产出包括农家肥、肉类、蛋类、乳品、皮毛、繁殖幼畜、老畜处理、配种和畜力等。投入部分包括精、粗饲料、补充饲料、幼畜购置、基建设备、配种、阉割、疫病防治、燃料和劳力等。约束条件中的数据主要是从社会需要、提高产品质量和改善生态环境等方面考虑设立的。种植业约束主要包括面积约束、产量约束和作物间的比例约束等。畜牧业的约束主要包括畜禽种类、数量约束和各畜禽饲养比例约束。此外，围绕建立农、牧业数学模型有关的数据，如农业分区、不同土地级别面积、各作物亩产量水平和农牧产品价格等都是必可少的重要组成部分。

各项数据主要来源于：(1) 有关部门历年来的统计资料；(2) 国家机关单位规定的统一标准数值，如商品单价等；(3) 选择有代表性的年度和单位，进行典型调查；(4) 查阅研究有关技术档案资料；(5) 经过农业区划，提供了大量的数据，为本模型奠定了基础；(6) 农业科技人员的实践经验。

三、计算结果与分析

1. 种植业　我们对上述各方案在北京石油化工科学研究院计算站的UNIVAC1100/10计算机上进行了多次反复计算，均得到最优解，求得各方案的变量数据。经过分类统计和计算，得到各方案全县和分区的纯收入、粮食总产量和各种作物播种面积、产量等效益、结构布局数值。

由计算结果可以看出：

(1) 全县纯收入(目标函数)以农牧结合和平年方案最大，涝年、旱年方案次之，旱涝年方案最小；灾情对模型有明显影响。

(2) 在灾年方案中，受灾地区粮食产量、纯收入均较平年方案降低；非灾区粮食产量也降低，但纯收入却普遍提高。这是由于灾年方案粮食产量约束数量减少，扩大了可行域所致。

(3) 各方案作物播种面积、产量的变化，呈现一定的规律。在旱年方案中，夏谷、夏薯的播种面积分别比平年方案增长了22.1%和232.4%，产量分别增长了20.2%和219.5%，且增长部分全部在山区。这说明耐旱作物，在旱年、旱区有着明显的优势。涝年方案中，沿黄春高粱播种面积和产量分别增长了106.5%和61.1%，耐涝作物发挥了优势。夏玉米主要分布在沿黄、平原区，各方案的播种面积基本稳定，但山区夏玉米的播种面积，在各灾年方案中变化较大，旱年方案、旱涝年方案和涝年方案分别占平年方案播种面积的33.5%、50.3%和66%。从而可以看出，夏玉米不耐旱、效益系数不高，灾年面积下降，而耐旱、耐涝作物所代替；冬小麦在诸方案中，面积和产量变化不大，这足以说明冬小麦具有抗逆性强和稳产的特点。

为了检查各方案的最优性，我们选取了与各方案相类似年份的纯收入进行了对比，见表1。

表1 各方案与相似年纯收入对比表 (单位：万元)

方案＼项别	相似年数	模型数	增减数	增减百分数(%)	备注
平年	4431.14	5012.19	581.05	13.1	相似年为1980年
旱年	3798.45	4823.91	1025.46	27.0	相似年为1979年
涝年	3828.01	4888.14	1060.13	27.7	相似年为1975年
旱涝年	4009.15	4721.04	714.89	17.8	相似年为1981年

从表1可以看出，各方案纯收入都较相似年的实际纯收入有所提高，体现了新方案的最优性。另外，各方案的粮食总产量均较相似年有不同程度的提高，粮食比例也有变化，含脂肪、蛋白质、氨基酸量高的大豆、谷子等数量有了增长。大豆播种面积的增加，对培肥地力、改善农业生态环境有良好作用。

种植业的结构和布局涉及到很多因素，由于受模型规模的限制和某些条件比较松动(如劳力充裕)以及某些因素缺乏量比关系和数据，虽然它们对模型有影响，但我们在建立模型设置约束条件时并未一一放人模型，而是在运算后，将所求得的最优解，与有关条件(如水、肥、劳力、机械等)分别进行对照，以检查模型的可行性。

(1) 水资源供需对照　按照长清县农业区划水资源调查组区划报告提供的资料，长清县水资源量多，年平均为 27 963.3 万立方米。目前，工副业用水 912.1 万立方米，人畜生活用水 636 万立方米，可供农业用水为 26 415.2 万立方米；而各方案农灌用水为 20484.1 万立方米，因此，水资源是有保证的。应该考虑水利工程开发，扩大水浇地面积。

(2) 肥料供需对照　据调查统计，长清县 1981 年化肥使用量(折纯)为氮 1 724 万斤、磷 563.2 万斤。人粪尿提供量(折纯)为氮 282 万斤、磷 95.88 万斤、钾 106.22 万斤。畜牧业肥料提供量(折纯)为氮 1 111.38 万斤、磷 695.16 万斤、钾 1 071.19 万斤。上述三项合计为氮 3 117.38 万斤、磷 1 354.24 万斤、钾 1 177.41 万斤。各方案(包括 10 万亩蔬菜、果树、林业、药材等用肥)肥料需要量(见表 2)，除平年方案磷肥不足外，其余均小于提供量，说明可适当加大施肥量，提高亩产。

表 2　各方案肥料供需表　　(单位：万斤)

肥料	提供量	平年方案需要量	旱年方案需要量	涝年方案需要量	旱涝年方案需要量
氮	3117.38	2292.50	1874.00	1918.10	1884.80
磷	1354.24	1458.00	1215.90	1229.80	1204.00
钾	1177.41	1161.90	928.66	1002.40	979.90

(3) 劳力、畜力、机械供需对照　经计算对比，劳力、畜力、机械的提供量大大超过各方案需要量。于是可以考虑：①不宜过多发展畜力，可多发展奶牛类；②劳力可以较多的转移，搞其他经营；③

搞好现有农机具配套、维修，不宜再增加大型农机具；4)提高劳、畜、机的利用率。

以上诸方案是在一定的气象条件下的最优方案，由于气象条件难以控制和准确预测，给上述方案的选取带来一定困难。为此，我们依照对策论的方法选取出旱涝方案为最优对策（赢得矩阵具有鞍点）。这一方案是比较能担风险的，在最不利的气象条件下（即旱、涝灾害同时发生）也能保证纯收益不低于 4 724 万元，该方案的可行性在上面已作了分析。

为便于实施，我们还计算出了各作物耕制在各种土地上的分布比例。

2. 畜牧业　畜牧业模型在山东大学 DJL-1 计算机运算后，得到最优解，其变量数值与现状结构对比见表 3。

从表 3 可以看出：猪由 41% 下降到 18.4%；羊由 17.8% 提高到 25%；家禽由 9% 下降到 4%；家兔由 3.6% 提高到 25%，适应了精粗饲料组成比例，饲草得到了充分利用。最优方案的纯收入以及肥料、肉、蛋、奶、毛、畜力等产量均高于现状，见表 4。

表 3　畜群结构对比表　　　（单位：头、匹、只）

畜别		牛	马	驴	骡	猪	羊	禽	兔	合计
存养量	现状结构	15155	757	2913	379	126381	110472	581842	111777	899673
	最优结构	20543	1020	3733	512	82877	225805	359546	1115948	1809984
折合牛单位	现状结构	15155	754	2039	379	25276	11047	5318	2236	62204
	最优结构	20543	1020	2613	512	16575	22581	3595	22319	89758
占总数的百分比（%）	现状结构	24	1	3	0.6	41	17.8	9	3.6	100
	最优结构	23	1	3	0.6	18.4	25	4	25	100

注　牛单位为畜统计中的一种标准量单位，便于比较所占比例。一个牛单位相当于一头牛或一匹马、一匹骡、五头猪等。

表 4 两种结构经济效益对比表

项目		单位	最优结构	现状结构	增加数	增长率(%)
饲草		万斤	60784	33388	27396	82
饲料		万斤	11569	9938	1631	16
粪尿		万斤	138823	105084	33739	32
粪尿折价	硫酸铵	吨	25352	15782	9570	61
	过磷酸钙	吨	20093	11669	8424	72
	氯化钾	吨	9636	7243	2393	33
肉		万斤	1862	1470	392	27
蛋		万斤	491	286	205	72
奶		万斤	821	95	726	764
畜力		百头日	29682	22439	7243	32
毛		万斤	129	26	103	396
产值		万元	6316	4013	2303	57
纯收入		万元	3075	1705	1370	80

从表 4 可以看出：最优结构与现状结构相比，各种效益都有较大提高，其中每年增加有机肥 33 739 万斤，相当于化肥硫酸铵 9 570 吨，过磷酸钙 8 424 吨、氯化钾 2 393 吨，可增产小麦 12 760 万斤。畜牧业产值增加 2 303 万元，提高 57%；纯收入增加 1 370 万元，提高 80%。

另外，我们还利用成本利润率方法分析模型的最优性，见表 5。

表 5 两种结构成本利润率对比表

结构	产值	利润额	生产费用	成本利润率
现状	4013	1705	2308	74%
最优方案	6316	3075	3241	95%

从表5可以看出现状（指1981年）畜牧业成本利润率为74%，最优方案为95%，提高了21%。成本利润率的提高，不仅是饲草、饲料得到充分利用的结果，更重要的是反映了畜群结构的合理性。

最优结构是在各种条件的约束下计算出来的，所以整个畜牧业完全置于有计划按比例的发展之下。因而解决了过去那种生产无计划，畜产品供不应求或无销路、市场价格不稳定，影响繁殖等问题。

四、几个问题的说明

1. 种植业和畜牧业的联系十分密切，畜牧业为种植业提供肥料和畜力，种植业为畜牧业提供粗、精饲料，二者形成了一个进行物质和能量交换的生态系统。研究二者之间的关系，把二者结合起来作为一个整体，寻求一个充分发挥这一整体功能的结构，将可能进一步提高经济效益。鉴于上述考虑，我们在分别研究了农业和畜牧业最优结构之后，又建立了农牧业结合的模型，并对平年气象条件下的状态进行了上机计算，得到了最优解，其年纯收入较原来分别求得的两个模型最优解的纯收入之和要高。

这体现了系统工程中的所谓“非加和原则”，为我们进一步寻求能充分发挥农、林、牧、副、渔五业更大的系统整体功能、调整结构布局和深入挖掘生产潜力提供了有价值的信息和途径。

2. 影响畜牧业发展的因素很多，如采取某些技术性措施，或扩大投入资金和饲料等。现在的问题是，能否在不增加或少增加投入的情况下，充分利用现有资源和技术条件，提高畜牧业的收益。很明显，在同样条件下，不同的畜群结构会产生不同的经济效益和不同的生态环境。有一种意见认为：当前畜牧业的状况存在着“饲草有余，精料不足”的问题。指出今后解决途径应多投入精饲料。这种意见，显然是基于现状结构而言，是努力使精、粗饲料的比例适合畜牧现状结构的需要。现状结构是否最优？能不能选取一个适

宜的结构以适应自然资源的现状？计算结果表明：这完全是可能的。我们得到的最优结构不但充分利用了现有饲草资源，而且不需投入或少投入精饲料，便可使纯收益大幅度提高。

3. 为了解市场价格对种植业最优布局的影响，对平年种植业模型进行了灵敏度分析，从分析结果可以看出，有些组合的布局基本是稳定的，但也有些比较敏感。例如一年一作的棉花在沿黄区潮土Ⅱ级无水浇地上，一年两作的小麦—夏玉米‖夏大豆在平原区褐土Ⅱ级保浇地上，两年三作的小麦—夏谷—春花生在山区褐土Ⅱ级无水浇地上，小麦—夏玉米‖夏大豆—春高粱在平原区褐土Ⅰ级保浇地上播种亩数都有显著下降的趋势；一年一作的春花生在山区褐土Ⅱ级无水浇地上，一年两作的小麦—夏玉米‖夏大豆在平原区褐土Ⅰ级保浇地上，两年三作的小麦—夏玉米‖夏大豆—春高粱在平原褐土Ⅱ级保浇地上均有显著上升的趋势。这些对我们今后根据市场价格预测调整作物布局以得到最大收益来说均有参考意义。

4. 根据平年、旱年、涝年、旱涝年四个最优方案利用对策论方法求出了以旱涝方案为最优对策，这从中得到一条启示。我们过去做计划，安排作物布局多以平年气象条件为基础，没有或者很少考虑在不利气象条件下应当采取相应的对策。据三十多年来统计资料表明，旱、涝年发生的频率在70%以上，所以，一旦出现旱涝灾害，种植业布局就不适应，这是致使种植业经济效益不高的重要原因。利用四个方案，人与大自然进行对策获得的信息表明，只要能了解发生灾害的频率，把布局作相应调整，就可以减少盲目性，增强适应灾害的能力，取得较好的经济效益。

中国科学院系统科学研究所，应用数学研究所，农业现代化研究委员会，北京石油化工科学研究院，山东省农业区划委员会办公室，山东省农业科学研究院畜牧研究所、家禽研究所，山东省农业厅，山东大学计算机科学系，山东师范大学地理系，济南黄河修防处，山东省气象台，长清县农委、农业局、水利局、农机局、区划办公

室、气象局、计委和统计局等单位为本项工作给予热情指导和帮助，在此谨致谢意。

[分析]

1. 内容选择

《系统工程在长清县农牧业最优结构布局中的应用》是一篇高水平的建立最优化数学模型的数学应用论文。

课题不仅有全县多因素的情况，而且涉及数学理论知识面广：系统工程方法、线性规划、对策论与决策论等运筹学(分支)的重要方法，还涉及到经济数学方法。作者结合实际给出了具有上千个变量和百余个约束条件的大型线性规划模型……，最后求得相应的最优化方案。论文内容的选择不仅指导我们如何建立数学模型，而且是学数学促进经济发展的一个方向问题。

2. 题目推敲

一般说来，面对全县种植业、畜牧业(受多因素干预)情况，寻求一个最优布局和结构，涉及数学知识面广，数学方法多，确定论文题目是困难的。该文作者推敲的题目《系统工程在长清县农牧业最优布局中的应用》及分段标题(一、建立模型　二、数据来源　三、计算结果与分析　四、几个问题的说明)，相对于实际背景，该题目(及分段标题)十分简洁、确切、通俗易懂、富有科学性，十分清楚地揭示出中心内容的含义、深度和范围。如果改换一下，都不能达到上述效果。

3. 创作新意

作者不仅选题内容十分有意义，题目锤炼得好，更重要的在于作者面对这样一个十分复杂的大课题，建立数学模型，使得论文富有创造性、理论性、实用性。

4. 创作技法

(1) 该论文结合实际，灵活运用通俗易懂的语句，体现出数学建模的一般步骤(见文中标题、分段标题)；

(2) 写作技巧高、内容精练。主要体现在：

① 简化具体过程；

② 突出研究成果；

③ 逻辑严密，语言通俗易懂。

第五章　数学专题研究论文

数学专题研究论文，是作者对某数学学科及其分支、边缘学科特定领域、特定问题专项课题研究，对创造性研究成果进行理论分析、论证的文章。

数学专题研究论文的内容、观点、结论在所研究的领域内，具有一定的开拓性、创新性，发现有价值的新问题、新方法、新理论、新规律，具有一定的理论高度和应用价值。

这类论文要求作者在掌握坚实宽广的基础理论和系统、深人的专门知识的同时，更要有独立从事科研的能力。

第一节　课题的选择

选题是十分重要的，可以说是论文成败的关键。

这里所说的选题，既包括科研课题的选择，又包括论文题目（标题）的选择。

科研课题和论文题目既有区别又相互联系，科研课题是指科研所围绕进行并企图得到解答的具体问题；而论文题目则通常是科研课题选择完成前后，在课题的基础上，依照整个科研成果或其中的一部分经推敲拟定的。

一般说来，选定了科研课题，就确定了研究方向，同时也就确定了论文的题目和论文内容范围。

一、选择课题的原则

般来说，选择课题没有固定的模式，但总的应遵循以下原则。

1. 创新性原则

科学研究是要解决前人没有解决或没有完全解决的问题，是一种创造性的劳动。科研课题和论文题目的创新性，是衡量科研成果、论文价值的重要标准。因此，科研工作者从选择课题、论文题目开始，就要十分重视创新性。

创新性包括以下几个方面：

(1) 方法上的创新

新的数学方法或实验方法，如系统方法、信息方法、控制方法、计算机信息处理技术等无一不是方法上的创新。方法上的创新，通常是科学新发现的先驱，或是新兴理论、技术的生长点。例如：著名数学家欧拉巧妙地解决了"七桥"问题，以此为基础研究了超出通常欧几里得几何范围的问题，从而奠定了"网络论"的基础；中国科学院计算中心早在60年代，就运用冯康教授等创立的有限元法，设计了一些工程计算专用程序，在国家重点工程建设中发挥了重大作用。

(2) 应用上的创新

应用上的创新即把已有的原理、方法、理论应用到新的领域、项目中去。例如：把激光全息术应用于全息存储、全息照相，提供了许多新的技术手段；泛函分析中的无穷维 von Neumann 代数解决了拓扑学中三维空间中打结理论中的一些难题。

(3) 概念、观点上的创新

概念、观点上的创新即提出新概念、新论点，给出新证明。

2. 创造性原则

创造性原则是指作者在某个学科或专门技术上有明显的突破，取得创造性成果。主要体现在：

(1) 发现有价值的新现象、新规律，建立新理论；

(2) 设计实验技术上的新创造、新突破；

(3) 提出具有一定科学水平的新工艺、新方法，获得重大经济效益；

(4) 利用现有知识、理论,解决前人没有解决的问题。

3. 可行性原则

课题的分量和难易程度要恰当,对所需图书资料、仪器设备、经费等客观条件,要有正确的估计,要充分利用和发挥自己的有利条件。如果本人善于理论研究,有关文献资料丰富,选择理论性课题便较易得手;如果本人技术水平高,喜爱实验,选择实验性课题较易成功;如果本人知识面宽,又有较好的协作条件,可选择某些跨学科的研究项目。

当然,一个人的选择课题范围,最好集中在某一学科或专题,逐步形成自己的特色或专长,从而专门从事一个领域的研究。

二、选择课题的途径

在遵循选题基本原则的前提下,如何广开思路,灵活运用各种方法来帮助我们正确选择研究课题呢?可以从以下几个方面加以考虑。

1. 在前人的基础上选题

数学的发展总是立足于前人工作的基础之上。我们一方面要在对前人的知识和研究成果深刻了解和掌握的前提下,选择前沿性课题;另一方面要从前人的数学思想和研究中获得启迪,系统地研究已有成果,占有大量信息,只有这样才能在前人研究的基础上再前进一步,创作出有价值的高水平论文。

牛顿说得好:"假如我能比别人瞭望得略为远些 那是因为我站在巨人的肩膀上。"的确如此,牛顿之所以取得了惊人的成就,就是站在了哥白尼、伽利略、开普勒这些巨人的肩膀上的缘故。所以,要充分重视人类长期积累起来的"信息库"的作用,到自己研究的领域内探索、发现新的研究课题。

2. 敢于开拓新的领域

当代数学的新特点是数学内部各分支间的相互渗透、数学与其他学科的相互渗透以及出现计算机技术,使得科学的发展越来

越呈现出综合化、专门化。因此，作者应注意各学科的边缘地带以及新学科的生长点。所以，要不断扩大自己的知识面，敢于开拓新的研究领域。

例如：运用数学对重要信息加密或破密，形成了一门新的应用数学——密码学，即密码分析与信息安全设计。北京大学段学复教授的成果对于一类重要的特殊情况能提高计算时效 2000 倍。中科院系统研究所万哲先院士等人相互独立同时完成对移位寄存器序列的理论，他们的成果丰富了线性及非线性移位寄存器序列的理论，在保密通信中有重要的应用。

今后，非线性数学是重要的发展方向，还有离散数学（涉及数论、抽象代数、数理逻辑、组合论、图论、博奕论、规划论）、概率论与数理统计、计算数学以及数学对生物学、经济学、管理学、控制论等渗透和应用，都会有新的研究领域。

3. 解决新问题和原理论的矛盾

在科学实践中，新事实层出不穷，不断揭露原有理论的局限性（或错误性）。在数学科研中，新的问题与原理论的矛盾时有发生。为了解决这一矛盾，很多数学家，以新的问题为根据，提出新的研究课题，作出新的论述、新的论证，得出新的结果，创作出引起国内外关注的数学论文。

例如：陈景润、王元、潘承洞等一批数学家和中青年专家杨乐、张广厚等的研究成果饮誉国际；一批优秀的青年博士学成回国，填补了若干重要的空白领域；许多专家、教授、学者，在“新问题与原理论的矛盾”这块领域内，选择了许许多多的研究课题，诸如什么“改进”、“推广”、“发现”的数学论文，引起国内外的关注。

除了以上列举的几种途径外，还可以从不同观点和学派的争鸣中选题，在人们容易忽视的地方深入，或者敢于提出新的研究设想。

总之，科研选题的途径是多种多样的，只要我们下苦功夫，掌握高深的数学理论工具，开通思路，提高选题本领，就会不断发现

新的课题。

第二节　论文的写作

选择课题后，就进入论文的写作阶段。

数学专题研究论文是高水平的论文，它不仅要求作者具有较高的水平和创作技法，而且要求所创作的论文具有创新性和创造性。

一、论文的结构及其特点

1. 论文的结构

由于数学专题研究论文所表达的内容往往是很深邃和很复杂的，为了更好地反映出科研成果，国内外不少学术刊物要求，要尽量以较短的篇幅和较少的项目来整理一项科研成果。

数学专题研究论文的结构一般趋于相对稳定的形式，包括：标题、署名、摘要、关键词、引言、理论分析（材料、方法、实验结果的分析与比较）、结论、参考文献、附录。如图 5-1 所示。

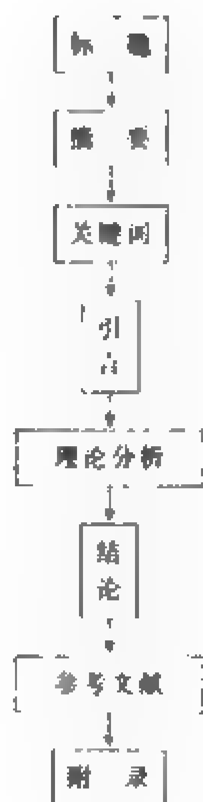


图 5-1

2. 论文的特点

数学专题研究论文的主要特点是：

(1) 论文的一般形式规范

这类论文的结构严密，格式一般较为固定。目前，国内学术刊物上基本采用上述统一格式。

(2) 论文具有创造性和理论性

这类论文不但具有创造性，而且还突出理论性。即论文对实验、观察、猜想所得到的结果，能从一定的理论高度进行分析和总结，对创新性或创造性的问题，用事实和理论进行严密的符合逻辑的论证和说明。论文所表达的发现或创造具有实用价值和理论价值。

(3) 论文在理论上具有创新成果

这类论文在理论上具有创新研究成果，这是论文最突出的特点之一，也是论文的关键所在。否则，就不能称之谓专题研究论文了。

例如：只解决实际问题而没有理论分析的论文；仅用计算机计算、绘图，而没有实践证明、没有理论意义的论文；只探索了实验全过程，而未得出结论的论文；资料综述性的论文等，都不能说成是数学专题研究论文。

二、论文的写作要求

创作一篇数学专题研究论文，对多数人来说是困难的。即使选择了课题，确定了论文题目，还必须认真撰写。

1. 拟定提纲

(1) 提纲的意义

拟定提纲，实际上相当于由序码和文字组成一种逻辑图表，它能帮助作者把握文章全篇的逻辑构成，建立论文的基本骨架，把自己初步酝酿形成的思路、观点、想法用文字固定下来。写起来就会全局在握，目标明确，思路开通，会避免松散零乱。依据提纲行文，随着思路的深化，会有许多新的想法、新的发现。通过深入分析研究材料，分清主次和从属关系，然后以严密的科学论证，有层次、有

步骤地解决问题。

(2) 提纲的要求

为了表现论文的主题思想，必须合理安排内容结构。对如何安排材料，应进行粗略的设想。根据主题需要，勾勒出组成文章结构的大块图样，并把材料分配到文章的各个部分。提纲的拟写项目齐全，能初步构成文章的轮廓。包括项目应为：题目；文章的宗旨目的；中心论点所隶属的各个分论点；各个分论点所隶属的小论点；各小论点所隶属的论据材料（理论材料、实例材料）；每个层次采取哪种论证方法；结论；建议。这样，由略到详，经过反复思考，逐步修改完成。

(3) 拟定提纲的方法

拟写提纲一般有标题式和提要式两种方法。

标题式提纲是以简要的语词构成的标题形式。它把该部分的内容概括出来，引出每一部分或每一段中所要讨论的主要内容。

这种写法简洁、扼要，便于记忆，是最为普遍的一种写法。

提要式提纲是把标题式提纲中每一内容的要点展开，对论文全部内容作粗线条的描述。提纲中的每一个句子都是正文里每一段落的基础，这种提纲概括地写出各个层次的基本内容，其写法具体、明确，实际上已形成文章的雏形。

提纲的写法应根据自己写作习惯来拟定，其目的在于启发写作的主动性和创造性。写作时既要遵循提纲，又不要过分受提纲的束缚，要边写边思考，不断开拓思路，才能写出高水平的论文来。

2. 草稿

写草稿是论文形成过程中较为艰苦的工作阶段，它既是对论文从内容到形式精雕细琢的过程，又是作者对问题研究不断深化的过程。

写草稿的目的是要把作者所有想写的内容全部罗列出来、对全部实验数据和资料进行详细的分析、归类。

草稿的写法一般采用以下几种写作法。

（1）严格顺序法

严格顺序法，即作者按照自己选题的内容结构，根据一定的顺序，详细阐述自己的观点。

（2）一气呵成法

作者对所写的内容结构、形式均已深思熟虑，胸有成竹，此时，可以根据自己的思维，一气呵成。

这种写法形成初稿，一般主线清晰，论点鲜明，层次清楚。

（3）分段写法

作者对论文的主要论点已经形成，但对论点的说明或阐述可分若干层次进行。此时，如果作者对某个层次已经考虑成熟，可动笔先写，完成此段内容，全文写完后，进行对照检查，使前后层次的论述保持连贯。

（4）重点写法

作者对论文的主要论点及论据已经明确，但还不能一气呵成，此时可采用重点写作的办法。即先给出结论，再写出主要论据，或围绕一个问题，展开分析。抓住重点问题写深写透。这种写法不是按文章的自然顺序写，而是根据自己的构思，分解主次，分别写作，最后组装成篇。

无论运用什么方式撰写草稿，还要注意以下几点要求。

第一，要尽可能在草稿中把自己想到的全部内容写进去，使初稿内容尽量充分、丰富；

第二，行文要合乎文体规范，论点、论据、论证所有项目俱全，纲目分明，逻辑清楚。论文中量的符号和单位规范化，一律采用国际或国家统一标准，文中图、表、公式的书写符合规范要求。

3. 修改

修改是对草稿所写的内容不断加深认识、对表达形式不断优化选择的过程，是对全文的论点、论据及论证进行再次锤炼和推敲，使论文臻于完美的过程。

（1）修改观点

修改观点应从两方面进行：一是观点的订正，检查全文的论点及由它说明的若干问题是否带有片面性或表述不够准确，如发现问题，应再作思考，予以增补、改换；二是观点的深化，检查论文有无新意或创造，若没有新意，应再从新的角度提炼观点，形成自己的新见解。

（2）修改材料

修改材料应从两方面进行：一是改换材料在全文中的位置，使各部分材料更应准确、更有说服力，增强论证的逻辑效果；二是改换新的材料，去掉不典型、不新颖、说服力不强的材料，使论文内容精练，中心突出。

（3）修改结构

一是检查论文整体大局和内容的表现效果，论点、论据、论证三要素是否全部具备和得当，是否层次分明；二是检查结构的各部分安排是否妥当，开头、结尾、段落、层次、主次结构的各个环节是否合适。若有问题，应从大处着眼，抓住主要矛盾修改，务必以鲜明、准确、生动地表现文章的内容为基本准则。

4．压缩

（1）压缩引言

一篇论文，其背景、研究动态、本文目的、写作手段等毕竟不是全文的核心，所以引言部分应能删则删，尽量压缩，只要起到扶助论点的作用即可。

（2）压缩论证过程

一篇好的论文，其论证应是简洁有力，对原稿中众人皆知的东西，尽量压缩到最低限度。

（3）压缩图表

图表中已表达清楚的内容，一般不再作过多文字的叙述，以免图表与文字表述重复。图表应结构合理、项目清楚、大小适度，否则，应进行修改、压缩、调整。

（4）压缩参考文献

篇论文的最后应录入与论文论点、论据有关的文献，而对次要的、陈旧的参考文献应尽量压缩。

总之，数学专题研究论文写作过程中，强调"草稿"、"修改"、"压缩"的目的是为了使论文总是按着：

提出问题—论证问题—创造性结果的思维运行过程去撰写，使论文既简洁又富有创造性。

第三节　例　文

前面已说过，数学专题研究论文是高水平的数学论文。

数学专题研究论文在某个研究领域内，必须是创造性地提出新问题，从一定的理论高度分析、论证，解决新问题，取得新的研究成果。论文所表达的发现或发明，不仅具有重要的实用价值，而且具有较高的理论价值。

由于数学专题研究论文具有创造性，国内外刊物对论文的结构、体例要求较为规范，所以数学专题研究论文写作比一般的数学论文写作更易集中、简洁、完美。

下面，我们从《数学年刊》、《纯粹数学与应用数学》中，选取山东省数学会副理事长、国务院颁发的政府特贴获得者、山东师范大学数学系系主任李师正教授撰写的两篇专题研究论文为范文，以期受到启迪。

例文 9

完备向量格中的凸集分离定理

李师正
（山东师范大学数学系，济南 250014）

摘　要　本文提出完备向量格中凸集分离的充要条件，由此

分别推出凸规划 Kuhn-Tucker 定理及广义 Farkas 定理中的充要条件。

一、引 言

[1]中将经典的凸集分离定理推广到完备的向量格中，并给出在凸规划上的应用。本文对[1]的结果给予改进。设 X 为实线性空间，X^* 为 X 的共轭空间，即 X 上的实线性函数的全体。用 $\mathbf{R}_+$、$\mathbf{R}_+^n$、$\mathbf{N}$ 分别表示非负实数集、坐标非负的 n 维向量集、正整数集。设 $A\subseteq X$，A' 记 A 的代数内点集，如果 $0\in A'$，称 A 为吸收集。Y 假定为完备向量格[1]。设 C 为 $X\times Y$ 中凸锥，[1]中主要有以下的凸集分离定理，表现为线性映射的存在定理：

引理 1.1[1] 如果 C 适合

1) $G_Y:=\{g\in Y\mid(0,y)\in C\}$ 有下界；

2) 存在 $\bar{y}\in Y$，使 $V_X:=\{x\in X\mid(x,\bar{y})\}$ 是 X 中的吸收集，则存在线性映射 $A:X\to Y$，使 $\forall\ (x,y)\in C$，有

$$A(x)+y\geqslant 0. \tag{1}$$

实际上条件 2)是一个较强的限制，如

例 1.2 $X=\mathbf{R}^2$，$Y=\mathbf{R}$，$X\times Y$ 是通常的三维空间，X 为水平坐标平面，设 C 为第一卦限，即 $C=\mathbf{R}_+^3$，这时显然适合引理 1.1 的条件 1)，因 $G_Y\geqslant 0$，但条件 2)不成立，因 $\forall\ \bar{y}\in Y$，$V_X=\{(x,\bar{y})\in C\}=\begin{cases}\varnothing, & \text{当 } \bar{y}<0 \text{ 时},\\ \mathbf{R}_+^2, & \text{当 } y\geqslant 0 \text{ 时}.\end{cases}$ $\mathbf{R}_+^2$ 不是吸收集。然而结论成立，因线性映射 $A:X\to Y$，$A(x_1,x_2)=x_1+x_2$ 显然适合：$\forall\ (x_1,x_2,y)\in C$，有

$$A(x_1,x_2)+y=x_1+x_2+y\geqslant 0.$$

本文试图找出使(1)式成立的充要条件，然后由此推出凸规划 Kuhn-Tucker 定理成立的充要条件，这样就推广和改进了已知结果，最后进一步提出广义 Farkas 定理成立的条件。

二、凸集分离的充要条件

在 X 中引入集合

$$J = \{x \in X \mid 存在\ y \in Y, (x,y) \in C\}.$$

引理 2.1 J 为非零凸锥，且当 $C' \neq \varnothing$ 时，$J' \neq \varnothing$

证 由于 $(0,0)\in C$，$0\in J$. $\forall\, x_1, x_2\in J$，$\alpha,\beta\in[0,1]$，$\alpha+\beta=1$，则有 $y_1, y_2\in Y$，使 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in C$. 因 C 凸，$(\alpha x_1+\beta x_2, \alpha y_1+\beta y_2)=\alpha(x_1,y_1)+\beta(x_2,y_2)\in C$，故 $\alpha x_1+\beta x_2\in J$，$J$ 为凸集. $\forall\, k\in \mathbf{R}_+$，$\forall\, x\in J$，有 $y\in Y$，使 $(x,y)\in C$，$(kx,ky)\in C$，$kx\in J$. J 为凸锥. 设 $(x',y')\in C'\neq\varnothing$，则 $x'\in V'\neq\varnothing$. 事实上，$\forall\, x\in X$，$\forall\, y\in Y$，可取 $k_0>0$，使当 $k\in[0,k_0]$ 时，$(x',y')+k(x,y)\in C$，因而 $x'+kx\in V$，$x'\in V'\neq\varnothing$. 证毕。

沿用[1]中记号

$$C_x = \{y \in Y \mid (x,y) \in C\}.$$

显然 $C_x\neq\varnothing \Leftrightarrow x\in J$. 定义映射

$$p: J \to Y \cup \{-\infty\}, \quad p(x) = \inf\{y \mid y \in C_x\}.$$

引理 2.2 p 为凸映射。

证明可由 C 的凸锥性及 C_x、p 的定义推出。

以下是本文的一个主要结果：

定理 2.3 设 X 为实线性空间，Y 为完备向量格，$0\neq C$ 为 $X\times Y$ 中以 $(0,0)$ 为顶点的凸锥，设 $J'\neq\varnothing$，则以下结论等价：

1) 存在线性映射 $\Lambda: X\to Y$，使 $\forall\,(x,y)\in C$，有 $\Lambda(x)+y\geqslant 0$；

2) $\forall\, x\in J$，C_x 有下界，即

$$p(x) > -\infty;$$

3) 存在 $\tilde{x}\in J'$，$C_{\tilde{x}}$ 有下界，即

$$p(\tilde{x}) > -\infty.$$

证 1)$\Rightarrow$2). $\forall\, x\in J$，$\forall\, y\in C_x$，则 $(x,y)\in C$，因而

$$\Lambda(x) + y \geqslant 0, \quad y \geqslant -\Lambda(x),$$

C_x 有下界 $A(x)$.

2)⇒3)显然。

3)⇒1). 由于 p 的定义域

$$D(p)=J,\quad \tilde{x}\in J'=D(p)'.$$

令
$$X_0=\{k\tilde{x}\mid k\in\mathbf{R}\}.$$

定义
$$L_0:X_0\to\mathbf{R},L_0(k\tilde{x})=kp(\tilde{x}).$$

当 $k>0$ 时,因 $\tilde{x}\in J$,有 $\tilde{y}\in C_x$,使 $(\tilde{x},\tilde{y})\in C$,由 C 为凸锥,

$$(k\tilde{x},k\tilde{y})\in C,\quad k\tilde{x}\in J.$$

$\forall\ y\in C_{k\tilde{x}}$,则

$$(k\tilde{x},y)\in C,(\tilde{x},k^{-1}y)\in C,k^{-1}y\in C_{\tilde{x}},$$

$$k^{-1}y\geqslant p(\tilde{x}),y\geqslant kp(\tilde{x})=L_0(k\tilde{x}).$$

由 y 的任意性及

$$p(k\tilde{x})=\inf C_{k\tilde{x}},$$

$$L_0(k\tilde{x})\leqslant p(k\tilde{x}).\tag{2}$$

当 $k=0$ 时,

$$C_0=\{y\mid(0,y)\in C\}.$$

由 $p(x)$在 J 上为凸映射,

$$p\left(\frac{\tilde{x}}{2}\right)=p\left(\frac{0+\tilde{x}}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}(p(0)+p(\tilde{x}))$$

$$p(0)\geqslant 2p\left(\frac{\tilde{x}}{2}\right)-p(\tilde{x}).\tag{3}$$

由 3)
$$p(\tilde{x})>-\infty.$$

如
$$p\left(\frac{\tilde{x}}{2}\right)=-\infty,$$

则有 $y_n\in C_{\frac{\tilde{x}}{2}},n\in\mathbf{N}$,

使$\{y_n|n\in\mathbb{Z}\}$无下界。但

$$\left(\frac{x}{2},y_n\right)\in C,$$

即 $$(\tilde{x},2y_n)\in C,$$

因而 $$\{2y_n|n\in\mathbf{N}\}$$

无下界，可推出

$$p(\tilde{x})=-\infty$$

矛盾，故 $$p\left(\frac{\tilde{x}}{2}\right)>-\infty.$$

由(3)， $$p(0)>-\infty.$$

C_0 有下界，而$(0,0)\in C$，故 $p(0)\leqslant 0$. $\forall\ y\in C_0$，即$(0,y)\in C$. 由于 C 为凸锥，

$$\forall\ n\in N,(0,ny)\in C,ny\in C_0.$$

因而集合$\{ny|n\in N\}$有下界 $p(0)$. 由于 Y 为 Archimede 空间[1]，推出 $y\geqslant 0$. 故

$$p(0)=\operatorname{Inf}C_0\geqslant 0.$$

但 $$p(0)\leqslant 0,$$

故 $$p(0)=0.$$

即(2)在 $k=0$ 时成立。

当 $k<0$ 时，如 $k\tilde{x}\in J$. 令 $k'=-k$，由 p 的凸性，

$$0=p(0)\geqslant\frac{1}{2}(p(k'\tilde{x})+p(k\tilde{x})).$$

将 k' 应用于(2)，得

$$p(k\tilde{x})\leqslant -p(k'\tilde{x})\leqslant -L_0(k'\tilde{x})=L_0(k\tilde{x}),$$

仍得(2)。因而(2)对使 $k\tilde{x}\in J$ 的所有 $k\in\mathbf{R}$ 成立，即在

$$X_0\cap D(p)=X_0\cap J$$

上有 $$L_0(x)\leqslant p(x).$$

又 $$\tilde{x} \in X_0 \cap D(p)^i = X_0 \cap J^i \neq \varnothing.$$

由[1]中定理 2，L_0 可线性地延拓到 X 上，成为 $L: X \to Y$，适合：

$$x \in X_0 \Rightarrow L(x) = L_0(x)$$

且 $$x \in J \Rightarrow L(x) \leqslant p(x).$$

令 $$A = -L.$$

$$\forall (x,y) \in C,$$

则 $y \in C_x, y \geqslant p(x) \geqslant L(x) = -A(x), A(x) + y \geqslant 0.$

得 1)。 证毕。

在例 1.2 中，显然 $J = \mathbb{R}_+^2$，$\forall x \in J, C_x = \mathbb{R}_+$，有下界 $p(x) = 0$。由定理 2.3，存在 $A: X \to Y$，使

$$\forall (x,y) \in C, A(x) + y \geqslant 0.$$

三、关于 Kuhn-Tucker 定理

现在将以上结果应用于非可微凸规划问题

(CP) $\operatorname{Min}\{f(x) \mid g(x) \leqslant 0, h(x) = 0, x \in X\}$，

其中 $f: D(f) \subseteq X \to Y$ 和 $g: D(g) \subseteq X \to Z$ 为凸映射，$h: X \to W$ 为仿射映射，Y 为完备向量格，Z 为半序线性空间，X 及 W 为线性空间。令

$$D_1 = D(f) \cap D(g).$$

又设 Y 和 Z 中正锥为 Y_+ 和 Z_+。以下假定

$$Y_+^i \neq \varnothing, Z_+^i \neq \varnothing, 0 \in h(D)^i.$$

记 $$y > 0 \Leftrightarrow y \in Y_+^i, z > 0 \Leftrightarrow z \in Z_+^i.$$

[1]中定理 5 推广了 Kuhn Tucker 定理：

引理 3.1 设

$$D(f)^i \cap D(g)^i \cap \{x \mid h(x) = 0\} \neq \varnothing,$$

且有 $$x_0 \in D(g), g(x_0) < 0, h(x_0) = 0,$$

则(CP)有解 $\tilde{x}$ 的充要条件是存在线性正映射 $A: Z \to Y$ 和线性映射 $M: W \to Y$，使$\forall x \in D$，有

$$f(x) + \Lambda(g(x)) + M(h(x)) \geqslant f(\hat{x}), \tag{4}$$

$$\Lambda(g(\hat{x})) = 0. \tag{5}$$

以下简单例子说明 Slater 型条件

"$\exists\, x_0 \in D(g), g(x_0) < 0, h(x_0) = 0$"

不成立时结论仍成立。

例 3.2 $X=Y=Z=W$ $D(f)=D(g)=D(h)=D=\mathbb{R}, f(x)=x, g(x)=2|x|, h(x)=x$。这时，显然不存在适合 $g(x_0)=|x_0|<0$ 的 x_0，但如果取 $\Lambda: Z\to Y, \Lambda(z)=z; M: W\to Y, M(w)=w$ 时，则 $\hat{x}=0$ 为唯一可行解及最优解。$\forall\, x\in X$，有

$$f(x) + \Lambda(g(x)) + M(h(x)) = 2x + 2|x| \geqslant 0 = f(\hat{x})$$

$$\Lambda(g(\hat{x})) = \Lambda(0) = 0.$$

(4)，(5)成立。

易见(4)，(5)等价于 Lagrange 函数

$$\varphi: D \times L^+(Z,Y) \times L(M,Y) \to Y,$$

$$\varphi(x,\lambda,\mu) := f(x) + \lambda(g(x)) + \mu(h(x))$$

以$(\hat{x},\Lambda,M)$为鞍点：

$$\forall\, x \in D, \forall\, \lambda \in L^+(Z,Y), \forall\, \mu \in L(M,Y),$$

$$\varphi(x,\Lambda,M) \geqslant \varphi(\hat{x},\Lambda,M) \geqslant \varphi(\hat{x},\lambda,\mu), \tag{6}$$

这里 $L^+(Z,Y)$和 $L(M,Y)$分别表示相应的正线性算子集及线性算子集。利用定理 2.3，可找出使(4)、(5)成立即存在鞍点的充要条件。设 $\hat{x}$ 为(CP)的最优解。在 $Y\times Z\times W$ 中，令

$$A := \{(y,z,w) \mid \text{存在}$$

$$x \in D, y \geqslant f(x), z \geqslant g(x), w = h(x)\}$$

显然 $$(f(\hat{x}),0,0) \in A.$$

因 $$0 \geqslant g(\hat{x}), 0 = h(\hat{x}).$$

取 $$A' := A - (f(\hat{x}),0,0)$$

$$= \{(y - f(\hat{x}), z, w) \mid (y,z,w) \in A\}.$$

令 $$P := \bigcup_{k\in\mathbb{R}^+} kA_1 \subseteq Y \times Z \times W.$$

以下设 D 为凸集。易证

引理 3.3 设 $Y^i_+\neq\emptyset$，$Z^i_+\neq\emptyset$，$0\in h(D)^i$，则 P 为顶点是(0，0，0)的凸锥，且 $P^i\neq\emptyset$.

引进 $Z\times W$ 和 Y 中集合

$$U:=\{(z,w)\mid \text{存在 } y\in Y,(y,z,w)\in P\}, \tag{7}$$

$$P_{(z,w)}:=\{y\mid (y,z,w)\in P\}. \tag{8}$$

由引理 2.1，U 为 $Z\times W$ 中凸锥，由于 $P^i\neq\emptyset$，故 $U^i\neq\emptyset$，本节的主要结果是以下定理。

定理 3.4 设 X，W 为线性空间，Y 为序完备向量格，Z 为半序向量空间，

$$f:D(f)\subseteq X\to Y,\ g:D(g)\subseteq X\to Z$$

为凸映射，$h:X\to W$ 为仿射映射，

$$D=D(f)\cap D(g)\neq\emptyset.$$

假定
$$Y^i_+\neq\emptyset,\ Z^i_+\neq\emptyset,\ 0\in h(D)^i,$$

则以下结论等价：

1）(CP)的任意最优解 $\hat{x}$，存在 $\Lambda\in L^+(Z,Y)$，$M\in L(W,Y)$，使(4)、(5)成立；

2）$\forall\,(z,w)\in U^i$，$P_{(z,w)}$ 有下界；

3）$\exists\,(\hat{z},\hat{w})\in U^i$，$P_{(\hat{z},\hat{w})}$ 有下界。

证 2)⇒1)．由引理 3.3，$P^i\neq\emptyset$．利用定理 2.3 中 2)→1)(视 P 为 C)，知存在

$$\overline{\Lambda}\in L(Z\times W,Y),$$

使
$$\forall\,(y,z,w)\in P,$$

有
$$\overline{\Lambda}(z,w)+y\geqslant 0. \tag{9}$$

由于
$$\forall\,x\in D,(f(x),g(x),h(x))\in A,$$

$$(f(x)-f(\hat{x}),g(x),h(x))\in A'\subseteq P,$$

因而(7)推出 $\forall\,x\in D$，有

$$\overline{\Lambda}(g(x),h(x))+f(x)\geqslant f(\hat{x}). \tag{10}$$

令
$$\Lambda(z):=\overline{\Lambda}(z,0),\ M(w):=\overline{\Lambda}(0,w),$$

由于 Λ 为线性映射，故 Λ 和 M 也是线性映射，且

$$\Lambda(z,w) = \Lambda(z) + M(w).$$

(10)化为(4)。

$$\forall z \in Z_+, (f(x), g(x) + z, h(\hat{x})) \in A,$$

而 $h(\hat{x}) = 0, f(\hat{x}) - f(x) = 0, (0, g(\hat{x}) + z, 0) \in A_1 \subset P$.

代入(9)，得

$$\Lambda(g(\hat{x}) + z) = \bar{\Lambda}(g(\hat{x}) + z, 0) \geqslant 0, \Lambda(z) \geqslant -\Lambda(g(x)).$$

取 $z=0$，得

$$\Lambda(g(\hat{x})) \geqslant 0.$$

$$\forall z \geqslant 0, n \in \mathbf{N},$$

则

$$nz \geqslant 0.$$

于是

$$n\Lambda(z) = \Lambda(nz) \geqslant \Lambda(g(x)),$$

即集合

$$\{n\Lambda(z) | n \in \mathbf{N}\}$$

有下界。由于 Y 的 Arohimede 性，$\Lambda(z) \geqslant 0$，故 Λ 为正映射。又因 $g(\hat{x}) \leqslant 0$，故

$$\Lambda(g(\hat{x})) \leqslant 0.$$

于是

$$\Lambda(g(\hat{x})) = 0,$$

得(5)。

1)⇒2)。设(4)、(5)成立。

$\forall (y,z,w) \in P, \exists x \in D, k \in \mathbf{R}_+, y' \in Y_+, z' \in Z_+$，

使 $y = k(f(x) - f(\hat{x}) + y'), z = k(g(x) + z'), w = kh(x)$，

令

$$\bar{\Lambda}(z,w) = \Lambda(z) + M(w),$$

则由 Λ 为正映射，$k \geqslant 0$ 及(4)，得

$$\begin{aligned}\bar{\Lambda}(z,w) + y &= \Lambda(k(g(x) + z')) + M(kh(x)) \\ &\quad + k(f(x) - f(\hat{x}) + y') \\ &= k(\Lambda(g(x)) + M(h(x)) + f(x) \\ &\quad - f(\hat{x}) + k\Lambda(z') + ky' \geqslant 0,\end{aligned}$$

有即(9)。

$$\forall (z,w) \in U, \forall y \in P_{(z,w)},$$

有

$$y \geqslant -\Lambda(z,w) > -\infty,$$

即 2)。

2)⇒3)。有引理 2.1,3.3,得 $U'\neq\varnothing$。又由定理 2.3 中 2)⇔3) 得出。 证毕。

四、Farkas 定理的前提条件

经典的 Farkas 定理[7]是:设 $A\in\mathbf{R}^{m\times n}$,$B\in\mathbf{R}^n$。如果由 $Ax\geqslant 0$ 推出 $B^Tx\geqslant 0$,则

$$\exists\, C\in\mathbf{R}^m_+ \text{ 使 } B=AC.$$

Farkas 使定理应用很广,且有许多推广[3-7],但都有某些附加条件。以下我们从凸集分离定理对 Farkas 的推广形式找出存在性的较弱的前提条件。

设 X,Y,Z 如 §3 所述,

$$\varphi\in L(X,Y),\psi\in L(X,Z).$$

当 $$\{x\,|\,\psi(x)\geqslant 0\}\subseteq\{x\,|\,\varphi(x)\geqslant 0\}$$

时,可诱导 $$\exists\,\lambda\in L^+(Z,Y),$$

使 $$\varphi=\lambda\psi,$$

称 Farkas 定理对 (φ,ψ) 成立。在 $Z\times Y$ 中引进集合

$$N_1=\{(-\psi(x)+z',\varphi(x)+y')\,|\,x\in X,y'\in Y_+,z'\in Z_+\}.$$

引理 4.1 N 为顶点为 $(0,0)$ 的凸锥。

证 $$(0,0)\in(-\psi(0),\varphi(0))\in N\neq\varnothing.$$

$\forall\,(z_1,y_1),(z_2,y_2)\in N,\alpha,\beta\in[0,1],\alpha+\beta=1,k\in\mathbf{R}^+$,

有 $$x_i\in X,y_i\geqslant\varphi(x_i),z_i\geqslant-\psi(x_i),i=1,2.$$

由于

$$\begin{aligned}(\alpha z_1+\beta z_2,\alpha y_1+\beta y_2)&\geqslant(-\alpha\psi(x_1)-\beta\psi(x_2),\alpha\varphi(x_1)+\beta\varphi(x_2))\\&=(-\psi(\alpha x_1+\beta x_2),\varphi(\alpha x_1+\beta x_2)),\end{aligned}$$

可知 $$(\alpha z_1+\beta z_2,\alpha y_1+\beta y_2)\in N.$$

又由 $$\begin{aligned}k(z_1+y_1)&\geqslant k(-\psi(x_1),\varphi(x_1))\\&=(-k\psi x_1),k\varphi(x_1))\end{aligned}$$

$$(- \psi(kx_1), \varphi(kx_1)),$$

推出 $$kx_1, y_1) \in N.$$ 证毕。

引理 4.2 设 $Y^{i}_{+} \neq \varnothing$，$Z^{i}_{+} \neq \varnothing$，则 $N^{i} \neq \varnothing$.

证 $\forall\, y' \in Y^{i}_{+}$，$z' \in Z^{i}_{+}$，则

$$(z', y') = (-\psi(0) + z', \varphi(0) + y') \in N.$$

显然 $$(z', y') \in N^{i} \neq \varnothing.$$ 证毕。

N 相当于 §1 中 C. 引入相当于 J 和 C_z 集合：

$$Q := \{-\psi(x) + z' \mid x \in X, z' \in Z^{+}\} \subseteq Z,$$

$$N_z := \{\varphi(x) + y' \mid \psi(x) \geqslant -z, y' \in Y, x \in X\}, z \in Q.$$

显然 $$N_z = \{y \mid \exists\, z \in Z, (z, y) \in N\}.$$

定理 4.3 设 X 为线性空间，Y 为完备向量格，Z 为半序线性空间，$Y^{i}_{+} \neq \varnothing$，$Z^{i}_{+} \neq \varnothing$，$\varphi \in L(X, Y)$，$\psi \in L(X, Z)$，则以下结论等价：

1) 存在 $\lambda \in L^{+}(Z, Y)$，使 $\varphi = \lambda\psi$；

2) $\forall\, z \in Q$，$\exists\, y \in Y$，$\{\varphi(x) \mid \psi(x) \geqslant -z\} \geqslant y$；

3) 存在 $\bar{z} \in Z^{i}_{+}$ 及 $\bar{y} \in Y$，使

$$\{\varphi(x) \mid \psi(x) \geqslant -\bar{z}\} \geqslant \bar{y}.$$

证 1)⇒2). 由 $\varphi = \lambda\psi$，$\forall\, (z, y) \in N$，存在 $x \in X$，使

$$\varphi(x) \leqslant y, \ -\psi(x) \leqslant z,$$

于是 $$\lambda(z) + y \geqslant -\lambda\psi(x) + \varphi(x) = (\varphi - \lambda\psi)(x) = 0.$$

由定理 2.4 中 1)⇒2)，知

$$\forall\, z \in Q, \{\varphi(x) + y' \mid -\psi(x) \leqslant z, x \in X, y' \in Y_+\} = N_z$$

有下界。即有 $y \in Y$，当 $\psi(x) \geqslant -z$ 时，$\varphi(x) \geqslant y$.

2)⇒3). $Z_+ \subseteq Q$，因

$$\forall\, z \in Z_+, z = -\psi(0) + z \in Q.$$

3)⇒1). 由 $\bar{z} > 0 = -\psi(0)$，$\bar{z} \in Q$. 显然 $\bar{z} \in Q^{i}$. 由定理 2.3 中 3)⇒1)(这时视 Z 为 X，N 为 C，Q 为 J，N_z 为 C_x)，存在 $\lambda \in L(Z, Y)$，使 $\forall\, (z, y) \in N$，有

$$y + \lambda(z) \geqslant 0.$$

$$\forall\, x \in X, (-\psi(x), \varphi(x)) \in N,$$

故 $$\varphi(x)-\lambda\psi(x)\geqslant 0,\varphi(x)\geqslant\lambda\psi(x).$$

用 $-x$ 代 x 由于 φ,ψ 的线性，得

$$-\varphi(x)=\varphi(-x)\geqslant\lambda(\psi(-x))=-\lambda(\psi(x)),$$

$$\varphi(x)\leqslant\lambda(\psi(x)).$$

因而 $$\varphi(x)=\lambda(\psi(x)),\varphi=\lambda\psi.$$

λ 为正线性映射。事实上，$\forall z\in Z_+$，则

$$(z,0)=(-\psi(0)+z,\varphi(0))\in N.$$

因而 $$\lambda(z)\geqslant 0.$$ 证毕。

定理 4.4 在定理 4.3 的条件下，如存在 $\hat{z}\in Z'_+$，使

$$\{\varphi(x)\,|\,\psi(x)\geqslant-\hat{z}\}\subseteq Y$$

有下界，则 Farkas 定理对 (φ,ψ) 成立。

证 如果 $\psi(x)\geqslant 0\Rightarrow\varphi(x)\geqslant 0$，由条件及定理 4.3 中 3)⇒1)得出结论。 证毕。

推论 4.5 在定理 4.3 的条件下，如存在 $\hat{x}$ 使 $\psi(x)\in Z'_+$，则 Farkas 定理对 (φ,ψ) 成立。

证 令 $$\hat{z}=\psi(\hat{x})\in Z'_+.$$

设 $$\{x\,|\,\psi(x)\geqslant 0\}\subseteq\{x\,|\,\varphi(x)\geqslant 0\}.$$

如果 $$\psi(\bar{x})\geqslant-\hat{z},$$

则 $$\psi(\bar{x}+\hat{x})\geqslant 0,$$

因而 $$\varphi(\bar{x}+\hat{x})\geqslant 0,\varphi(\bar{x})\geqslant-\varphi(\hat{x}).$$

取 $$\hat{y}=-\varphi(\hat{x}),$$

则 $$\{\varphi(x)\,|\,\psi(x)\geqslant-\hat{z}\}\geqslant\hat{y}.$$

由定理 4.4 得出结论。 证毕。

由上述证明可见推论 4.5 的条件可诱导定理 4.4 的条件，[2]中定理 3 的推论相当于推论 4.5，因而条件强于定理 4.4 的条件。

例 4.6 $Y=\mathbf{R},X=Z=\mathbf{R}^2,\varphi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=x_1,\psi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\0\end{pmatrix}.$

Farkas 定理对 (φ,ψ) 成立。此例适合定理 4.4 的条件

$$\left\{\varphi\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \middle| \phi\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \geqslant \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}' \geqslant 1,$$

但不适合[2]中条件(即推论 4.5 条件)因无 x 使 $\phi(x)\geqslant 0$.

参考文献

[1] 史树中 完备向量格的凸集分离定理及其应用. 数学年刊,6A,4(1985),431~438.

[2] Zowe J. The Saddle Point Theorem of Kuhn and Tuckerin Ordered Vector Spaces.J. Math. Anal. Appl. ,57(1977),41-45

[3] Ritter K. Optimization Theorem in Linear Spaces, Math. Ann., 183 (1969),169-180

[4] Swartz U. General Farkas lemma, J. Optim. Theory Appl., 46 (1985), 237-244

[5] Ishizuka Y. Farkas Theorem of Nonconvex Type, J. Optim. Theory Appl., 57(1988),341-354

[6] Craven B. and Kolihe J. Generalizations of Farkas Theorem SIAM J. Math. Anal., 8(1977),983-997

[7] Bockafellar R. Convex Anclysis, Princeton, NJ,1972

[8] 李师正. 有序向量空间中凸规划成立鞍点准则的充要条件. 系统科学与数学,7:4(1987),322~328

例文 10

Hamilton 半群的结构

李师正

(山东师范大学)

摘 要 每个子半群是左(右或双侧)理想的半群,称为左(右或双侧)Hamilton 半群,本文给出左(右或双侧)Hamilton 半群的刻划,并将左(右或双侧)Hamilton 半群表示为有向森林(或有向

树)，最后给出左(右或双侧)Hamilton 半群同构的充要条件。

关键词　Hamilton 半群；Hamilton 环

中图分类号：

每个子群是正规子群的群(Hamilton 群)，每个子代数是理想的代数(Hamilton 代数)，每个子环是理想的环(Hamilton 环)分别刻划于[1][2][3]，本文将描述左(右或双侧)Hamilton 半群，且给出它们的图论表示及同构的充要条件。

一、Hamilton 半群的刻画

定义 1.1　每个子半群都是左(右)理想的半群，称为左(右)Hamilton 半群，以下简称左(右)H 半群，同时为左、右 Hamilton 半群的半群称为双侧 Hamilton 半群，简称 H 半群。

定义 1.2　半群族 $F=\{S_\lambda \mid \lambda\in \Lambda\}$ 的(可以相交)并 $U(F)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$，若有二元运算。使之作成半群且与每个 S_λ 中原有运算一致，则称 $(U(F),\cdot)$ 为 F 的一个并半群。

定理 1.3　左 H 半群是且仅是以下半群之一：

1) 指数为 3 周期为 1 的循环半群[4]，即形如 $\langle a\rangle=\{a,a^2,a^3\}$，适合 $a^3=a^4=\cdots=e(a)$ 的半群，其中 $e(a)$ 表示 $\langle a\rangle$ 中的幂等元；

2) 指数为 2 周期为 1 的循环半群，即形如 $\langle b\rangle=\{b,b^2\}$，适合 $b^2=b^3=\cdots=e(b)$ 的半群，其中 $e(b)$ 表示 $\langle b\rangle$ 中的幂等元；

3) 单元素半群 $\langle e\rangle=\{e\}$；

4) 若干互不包含(可以相交)的 1)、2)、3)型半群的并半群：

$$S=\bigcup_{i\in I}\langle a_i\rangle \bigcup_{\alpha\in A}\langle b_\alpha\rangle \bigcup_{p\in P}\langle e_p\rangle, \tag{1}$$

其中指标集 I、A、P 互不相交且不全为空，上述表示式是唯一的，同时有以下乘法表：$\forall\, i,j\in I$，$\alpha,\beta\in A$，$p,q\in P$，

$$a_i a_j = a_j^{M(i,j)}, \tag{2}$$

其中 $M:I\times I\to\{2,3\}$，适合 $M(i,j)=2$；

$$b_\alpha a_j = a_j^{N(\alpha,j)}, \tag{3}$$

其中 $N: A\times I\to\{2,3\}$；

$$e_pa_i = a_i^3 (= e(a_i))\text{；} \tag{4}$$

$$a_ib_\alpha = b_\beta b_\alpha = e_pb_\alpha = b_\alpha^2 = (e(b_\alpha))\text{；} \tag{5}$$

$$a_ie_p = b_\alpha e_p = e_qe_p = e_p \tag{6}$$

证　充分性　1) 2) 3)型半群显然是左 H 的，设 S 为 4)型，T 为 S 的子半群，$\forall\, x\in S$，$y\in T$，x，y 总形如 a_i，a_i^2，a_i^3，$i\in I$；b_α，b_α^2，$\alpha\in A$；e_p，$p\in P$，于是可分情况讨论，如 $x=a_i$，$y=a_j^2$，则 $xy=a_ia_j^2=a_j^{M(i,j)}a_j=a_j^{M(i,j)+1}=e(a_j)=a_j^3\in\langle a_j^2\rangle\subseteq T$. 如 $x=a_i^2$，$y=a_j$，则 $xy=a_i^2a_j=a_ia_j^{M(i,j)}=a_ia_ja_j^{M(i,j)-1}=a_j^{2M(i,j)-1}=e(a_j)\in\langle a_j\rangle\subseteq T$，同时可证其他所有情况．

必要性　设 S 为左 H 半群，$\forall\, x\in S$，$\langle x^2\rangle$应为左理想，$x^3=xx^2\in\langle x^2\rangle$，设 $x^3=x^{2t}$，$3\neq 2t$，可以假定 x，x^2，…，x^n 互不相同，但 $x^{n+1}=x^k$，$1\leqslant K\leqslant n$，则 $G=\{x^k,\cdots,x^n\}$ 是循环群[4,p20]，设 x^l 为 G 的单位元，则$\forall\, x^m\in G$，由左 Hamilton 性，$x^m=x^mx^l\in\langle x^l\rangle=\{x^l\}$，故 $G=\{x^l\}$为单位元群，$k=n=l$，$\langle x\rangle=\{x,x^2,\cdots,x^n\}$，$x^n=x^{n+1}=\cdots$为幂等元，$\langle x\rangle$周期为 1，由于 $x^3=x^{2t}$，故 $n\leqslant 3$，因而 S 中每个循环子半群周期为 1，指数$\leqslant 3$，即 1) 2) 3)型半群之一。显然 S 关于循环子半群适合极大条件，故 S 应是极大循环子半群之并。而极大循环子半群互不包含，故生成元唯一。取 I，A，P 分别为 S 的 1) 2) 3)型极大循环子半群的指标集，因而 S 唯一地表为(1)形。

下面验证(2)～(6)，$\forall\, i$，$j\in I$，α，$\beta\in A$，p，$q\in P$，

$\langle a_j\rangle$应为左理想，故 $a_ia_j\in\langle a_j\rangle$，但 $a_ia_j\neq a_j$，因否则 $a_i^3a_j=a_i^2(a_ia_j)=a_i^2a_j=a_i(a_ia_j)=a_ia_j=a_j$，但$(a_i^3a_j)a_i^3\in\langle a_i^3\rangle=\{a_i^3\}$，推出 $a_j^2=(a_i^3a_j)^2=((a_i^3a_j)a_i^3)a_j=a_i^3a_j=a_j$，$a_j$ 幂等，矛盾。故 $a_ia_j=a_j^2$ 或 a_j^3，取 $a_ia_j=a_j^k$ 中最小正整数 k 为 $M(i,j)$，得(2)．类似可证 $b_\alpha a_i=a_i^2$ 或 a_i^3，令 $b_\alpha a_i=a_i^k$ 中最小正整数 k 为 $N(\alpha,i)$，则有(3)式．$e_pa_i\in\langle a_i\rangle$，但$(e_pa_i)e_p\in\langle e_p\rangle=\{e_p\}$，即$(e_pa_i)^2=((e_pa_i)e_p)a_i=e_pa_i$ 为幂等元，即 $e_pa_i=a_i^3$，得(4)．同法可证(5)(6)。　　　　证毕。

附注 1.4　上定理中，若将"左"改为"右"，(2)～(6)适当调换因子顺序，使得右 H 半群的刻画，由此又可得

定理 1.5　H 半群是且仅是以下半群之一：

1) 2) 3)型半群(见定理 1.3)；

4) 若干互不包含(可以相交)的 1) 2)型半群的下述并半群

$$S=\bigcup_{i\in I}\langle a_i\rangle\bigcup_{\alpha\in A}\langle b_\alpha\rangle, \tag{7}$$

其中指标集 $I\cap A=\varnothing$，S 有唯一的幂等元 $e=e(a_i)=e(b_\alpha)$ $i\in I$，$\alpha\in A$，S 的表达式(7)唯一。同时有以下乘法表：$\forall\, i,j\in I$，$\alpha,\beta\in A$，

$$a_ia_j=a_j^{\overline{M}(i,j)}=a_i^{\overline{M}(i,j)}, \tag{8}$$

其中 $\overline{M}: I\times I\to\{2,3\}$，$\overline{M}(i,i)=2$；

$$b_\alpha a_i=a_ib_\alpha=b_\alpha b_\beta=e. \tag{9}$$

证　充分性　1) 2) 3)型半群显然是 H 半群。4)型半群满足定理 1.3 和附注 1.4 的条件。即为 H 半群。

必要性　设 S 为 H 半群，自然为左 H 的，由定理 1.3，S 应为 1) 2) 3) 4)型半群之一，S 中幂等元 e 唯一，因若 e_1，e_2 幂等，则 $e_1e_2\in\langle e_2\rangle=\{e_2\}$，$e_1e_2=e_2$，同理 $e_1e_2=e_1$，即 $e_1=e_2$. 当 S 非 3)型时，$I\cup A\neq\varnothing$，$P=\varnothing$. (8)中若 $\overline{M}(i,j)=2$，$a_ia_j=a_j^2$，由附注 1.4，$a_ia_j\in\{a_i^2,a_i^3=e\}$，$a_j^2\neq e$，故 $a_ia_j=a_i^2=a_j^2$. 若 $\overline{M}(i,j)=3$，也有 $a_ia_j=a_j^3=a_i^3=e$，因而总有 $a_ia_j=a_i^{\overline{M}(i,j)}=a_j^{\overline{M}(i,j)}$，另外 $\overline{M}(i,i)=2$ 显然。由定理 1.3 和附注 1.4，$b_\alpha a_i=b_\alpha^2=e$，$b_\alpha b_\beta=b_\beta^2=e$，$a_ib_\alpha=b_\alpha^2=e$.

二、Hamilton 半群的图论表示

引理 2.1　左 H 半群 S 的幂等元集 $E(S)$ 是右零子半群(即适合 $xy=y$ 的子半群)。

证　$\forall\, e_1,e_2\in E(S)$，$e_1e_2\in\langle e_2\rangle=\{e_2\}$，即 $e_1e_2=e_2$.

以下给出左 H 半群的右零带分解结构：

定理 2.2　设 S 为左 H 半群，则 S 可分解为互不相交的单一幂等元极大子半群的右零带并(见[4]P.25—P.26)，即 $S=\bigcup_{e\in E(S)}$

S_e，其中

$$S_e = \{x \in S \mid 存在 n, x^n = e\}$$

是 S 的恰有一个幂等元的子半群，$S_e \cap S_f = \varnothing (e \neq f)$，$S_e S_f \subset S_f$

证　$e \in S_e \neq \varnothing$. $\forall x, y \in S_e$，$xy \in \langle y \rangle$，设 $xy = y^k$. 如 $y^m = e$，则 $(xy)^m = (y^m)^k = e$，$xy \in S_e$，故 S_e 为子半群，如果 $x \in S_e \cap S_f \neq \varnothing$，则 $e = x^k = f$，$S_e = S_f$. 由于 Hamilton 性，S_f 为左理想，故 $S_e S_f \subseteq S_f$.

定理 2.3　在左 H 半群 S 中，$\forall x, y, z \in S$，有 $xyz = e(z)$，$e(z)$ 表示 $\langle z \rangle$ 中幂等元。

证　若 S 为 1) 2) 3) 型时，显然。设 S 为 4) 型，假定 $x = a_i$，$y = a_j$，$z = a_k$，则 $xyz = a_i a_k^{M(j,k)} = a_k^{M(j,k)+M(i,k)-1} = e(a_k)$，因 $M(j,K) \geqslant 2$，$M(i,k) \geqslant 2$，同样可对 x, y, z 分别为 $a_i, a_i^2, a_i^3, i \in I; b_a, b_a^2, a \in A; e_p, p \in P$ 的情况一一验证 $xyz = e(z)$.

定义 2.4　在左 H 半群 S 中引进关系：

$$x \leqslant y \Leftrightarrow x = y 或 x 右整除 y. \tag{10}$$

引理 2.5　$(S, \leqslant)$ 为半序集，$\forall i \in I, a \in A, p \in P$，则

$$a_i^k \leqslant x \Leftrightarrow x = a_i^l, 1 \leqslant k \leqslant l \leqslant 3;$$

$$b_a^k \leqslant x \Leftrightarrow x = b_a^l, 1 \leqslant k \leqslant l \leqslant 2$$

$$e_p \leqslant x \Leftrightarrow x = e_p$$

因而极小元集为 $B(S) = \{a_i, i \in I; b_a, a \in A; e_p, p \in P\}$，以下称之为基集，极大元集为幂等元集 $E(S)$.

证　只须证 $\leqslant$ 的反对称性，设 $x \leqslant y$，$y \leqslant x$，若 $x \neq y$，则有 z_1，z_2，使 $x = z_1 y$，$y = z_2 y$，即 $x = z_1 z_2 x$，由引 2.3，x 幂等，$y = z_2 x \in \langle x \rangle = \{x\}$，推出 $y = x$，由于 S 的元素总形如 $a_i, a_i^2, a_i^3, b_a, b_a^2, e_p$，$i \in I$，$a \in A$，$p \in P$. 由 (2)～(6) 易得结论，证毕

下面给出 Hamilton 半群的图论表示

定理 2.6　在 H 半群 S 关于 $\leqslant$（见 (10)）的 Hasse 图（即覆盖图，记为 $G(S)$）是（可以无限的）有向森林，每个（可以无限的）有向

树层数$\leqslant 2$，代表一个单一幂等元的极大子半群S_e，$e\in E(S)$，叶为基元，根为幂等元，反之，任给层数$\leqslant 2$的有向森林都是某个左H半群的Hassse图。

证　由引理2.5，$G(S)$中每条弧$(x\to y)$只有以下一种类型：$(a_i^2\to a_i^3)$，$(a_i^3\to a_i^2)$，$(b_a^3\to b_a)$，$i\in I$，$a\in A$，弧两端的点显然属于同一S_e，因而不同的S_e之间既无公共顶点也不连通，且所有极大通道形如$a_i^3\to a_i^2\to a_i$，$b_a^2\to b_a$，$i\in I$，$a\in A$，在每个S_e中从幂等元e可达每个顶点，即e为根，而由引理2.5，根e到S_e中每个顶点的通道唯一，因而每个S_e表为一个有向树，最长通道长（即树层数）$\leqslant$ 2，基元是极小元，故为叶。

反之，设G为任意层数$\leqslant 2$的非平凡有向森林，顶点集为S，取G的层数为2，1，0的叶集分别为$\{a_i|i\in I\}$，$\{b_a|a\in A\}$，$\{e_p|p\in P\}$，a_i到根的通道的3个点记为a_i，a_i^2，a_i^3，b_a到根的通道的2个点记为b_a，b_a^2，若a_i和$a_j(i\neq j)$到根的通道有两个公共点，则规定$a_i^2=a_j^2$，$a_i^3=a_j^3$，若有一个公共点，则规定$a_i^3=a_j^3$，如a_i和b_a到根的通道有一个公共点，则规定$a_i^3=b_a^2$，别外规定$\forall i\in I$，$a\in A$，$a_i^3=a_i^4=\cdots$，$b_a^2=b_a^3=\cdots$，$e_p=e_p^2=\cdots$，S中例如可规定乘法为：任取叶x，y，$x^k\cdot x^l=x^{k+l}$；$x^k\cdot y^l=y$的根，当$x\neq y$时，乘法是良定义的，即若$x_i^k=x^k$，$y_j^l=y^l$，则$x_i^k\cdot y_j^l=x^k\cdot y^l$，这可就各种情况一一验证，同时，乘法是结合的，且与每个叶的方幂运算一致，即S表为1）2）3）型半群的互不包含的并半群，每极大循环子半群(x)（x为叶）代表一条极大通道，易见(2)～(6)成立，这里$M(i,j)=\begin{cases}3, & i\neq j,\\ 2, & i=j,\end{cases}$ $N(a,i)=3$，即$(S,\cdot)$为左H半群，易见$(S,\leqslant)$的Hasse图即已给的有向森林G，证毕

附注2.7　在定理2.6中，“左”改为“右”，(10)中“右”改为“左”仍成立。

定理2.8　任意H半群S作为左（右）H半群的Hasse图$G(S)$是一个（可以无限的）有向树，根为唯一的幂等元e，叶集为基

$B(S)$，层数$\leqslant 2$，反之，任意层数$\leqslant 2$的有向树G都是一个H半群的Hasse图。

证　由定理1.5，幂等元e唯一，当$|S|=1$，则$S=\{e\}$，当$|S|>1$，$I\cup A\neq\varnothing$，这时，S作为左H半群的Hasse图$G(S)$只有一个层数$\leqslant 2$的有向树，反之，设G是一个层数$\leqslant 2$的有向树，类似定理2.6，可用叶的方幂表示顶点，大顶点集S中例如可规定乘法如下：任取叶集中x,y，

$$x^k\cdot x^l=x^{k+l};\qquad x^k\cdot y^l=y^l\cdot x^k=e,x\neq y,$$

则易证乘法与顶点表示法无关，且是结合的，同时半群S中乘法与叶的方幂法则一致，并适合(7)～(9)，这里$\overline{M}(i,j)=3(i\neq j)$，$\overline{M}(i,j)=2$，故$(S,\cdot)$为$H$半群，易见$(S,\leqslant)$的Hasse图$G(S)$即是已给的有向树$G$。证毕

三、Hamilton半群的同构

定义3.1　设S为左(右)H半群，规定

$\Lambda_1:I\times I\to\{0,1,2,3\},(i,j)\to|\langle a_i\rangle\cap\langle a_j\rangle|$；

$\Lambda_2:I\times A\to\{0,1,2\},(i,\alpha)\to|\langle b_\alpha\rangle\cap\langle b_\alpha\rangle|$；

$\Lambda_3:A\times A\to\{0,1,2\},(\alpha,\beta)\to|\langle b_\alpha\rangle\cap\langle b_\beta\rangle|$；

两个不同构的在左H半群可以有同构的Hasse图，但可以适当增加条件保证左H半群同构。

定理3.2　左H半群S和S'同构当且仅当有等势的指标集I,A,P，且在指标集的集一一对应下，S和S'有相同的广义矩阵$M,N,\Lambda_1,\Lambda_2,\Lambda_3$(见定义1.3和3.1)。

证　只须证明充分性，两组指标集都用I,A,P表示，设σ为指标集的上述一一映射诱导的$B(S)$到$B(S')$的一一映射。S的每个元素至少有一种方式表为$a_i^k,i\in I,k=1,2,3;b_\alpha^l,\alpha\in A,l=1,2;e_p,p\in P$。令$\varphi:S\to S''$，$a_i^k\to a_i'^k$，$b_\alpha^l\to b_\alpha'^l$，$e_p\to e'_p$，其中$a'_i=\sigma(a_i)$，$b'_\alpha=\sigma(b_\alpha)$，$e'_p=\sigma(e_p)$，可就各种情况一一验证$\varphi$为良定义的，且为同态，此外，$\varphi$显然是满射，可就不同情况验证$\varphi$为单射，即有半群同

构 φ，$S\simeq S$. 证毕

附注 3.3 在上定理中"左"改为"右"仍成立。

定理 3.4 H 半群 S 和 S''同构当且仅当有等势的指标集 I、A，且在指标集的某一一对应下，S 和 S''有相同的广义矩阵 M 和 A_1。

证 类似定理 3.2。

定理 3.5 左(右)H 半群 S 和 S''具有图论意义下同构的有向森林(Hasse 图)当且仅当具有等势的指标集 I、A、P，且在指标集的某一一对应下，有相同的广义矩阵 A_1、A_2、A_3。

证 若 S 和 S''有同构的有向森林，则在这一同构下，2，1，0 各层的叶集之间有一一对应，即有等势的指标集 I、A、P(分别代表 2，1，0 层叶)，每个叶到根的唯一通道也一一对应，两个叶到根的通道的公共点数也应对应相等，即 A_1、A_2、A_3 相同。反之，若 S 和 S''的指标集的某一一对应下，有相同的 A_1、A_2、A_3 即表明 S 和 S''的 Hasse 图中对应的叶到根的通道有相同的长度，而且任意两个叶到根的通道的公共点数也对应相等，由此可以诱导顶点集的一一对应以及弧集的一一对应，显然保持连接关系，即诱导两有向森林之间的图论同构。

推论 3.6 两个左(右)H 半群同构当且仅当有等势的指标集 I、A、P，且在指标集的某一一对应下，有相同同构的有向森林(Hasse 图)及相同的广义矩阵 M、N。

定理 3.7 H 半群 S 和 S''具有同构的有向树(Hasse 图)当且仅当具有等势的指标集 I、A，且在指标集的某一一对应下，有相同的广义矩阵 A_1。

证 类似于定理 3.5. 证毕

推论 3.8 两个 H 半群同构当且仅当有等势的指标集 I、A，且在指标集某一一对应下，有相同构的有向树(Hasse 图)及相同的广义矩阵 M。

本文在写作过程中曾得到刘绍学教授的热心指导，在此深致

谢意。

参考文献

[1] Hall, M . Theory of Groups, Macmillan, New York, 1959

[2] 刘绍学 每 子代数都是理想的代数. 数学学报, 14, 4(1964), 532~537.

[3] Kruse, R. L. , Ring in which all subrings are ideals, I, Canad. J. Math., 20(1968), 862 871.

[4] Clifford, A. H. and Breston, G. B., The algebraic theory of semigroups, Vol. I, Amer. Math. Soc., 1961.

ON THE STRUCTURE OF HAMILTONIAN SEMIGROUPS

Li Shizheng

(Shandong Normal University)

Abstract. A semigroup in which all subsemigroups are left (right or two-sided) ideas is called left (right or two-sided) Hamiltonian semigroup. In this paper, the left (right or two-sided) hamiltonian semigroups are characterized, and they are represented by directed graphs. Furthermore, the nesessary and sufficient conditions for isomorphism of left (right or two sided) Hamiltonian semigroups are also given.

Key words. 1980 Mathematics Subject Classification.

第六章　大学本科生毕业论文

什么是毕业论文，毕业论文写什么，怎样写？对数学专业应届毕业生来说，很多同学常常感到茫然，不知该如何去写。

为解决这个问题，本章将在前五章内容的基础上，对数学专业大学本科生毕业论文的写作进行研究讨论。

第一节　毕业论文写作概述

本节先介绍毕业论文及其写作意义、毕业论文的特点、毕业论文撰写的形式

一、毕业论文及其写作的意义

1. 毕业论文

全国高等院校从 1977 级开始，恢复了写作毕业论文制度，要求应届毕业生在毕业之前都要有一定时间进行专题研究和写作。这种研究和写作的成果就是毕业论文。

毕业论文是高等学校教学过程中的一项不可少且具有重要意义的教学环节之一。其目的在于：

(1) 培养学生综合运用所学基础理论知识的能力，加强专业知识和科学研究的训练，提高分析问题和解决实际问题的能力；

(2) 在创作中巩固所学知识，拓宽学生的专业知识面；

(3) 培养学生严谨的科学态度和良好的工作作风。

高等院校数学专业本科应届毕业生所写的毕业论文，就是本书前五章里所讲的数学论文。

在撰写毕业论文之前，读者应认真阅读本书前五章，为写作毕

业论文打好基础。

2. 撰写毕业论文的意义

为了促进科技专门人才的培养，促进教育、科学事业的发展，我国制定了《中华人民共和国学位条例》、《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等文件（毕业论文也称学士论文），其中如何授予高等学校毕业生学士学位一项中规定："高等学校本科毕业生完成教学计划的各项要求，经审核准予毕业，其课程学习和毕业论文的成绩表明确已较好地掌握本门学科的基础理论、专门知识和基本技能，并且有从事科学研究工作或担负专门技术工作的初步能力的，授予学士学位"。

由此可见，撰写毕业论文是国家关于人才开发的一项重要措施，是对青年学生的鼓励和鞭策。

从上述写作目的、国家要求来看，撰写毕业论文对全面落实教学计划、综合检查学生学习质量和培养学生的研究能力等方面都有着重要的意义。

(1) 撰写毕业论文是全面落实教学计划的重要环节

为了实现培养目标，学校制订了相应的教学计划。在教学计划中，除对开设课程作出科学而具体的安排外，还安排了相应的实践性环节，如毕业实习、毕业设计、毕业论文写作等，可见毕业生写好毕业论文，是全面落实教学计划的一个实际步骤。如果缺少这一环节和步骤，就会影响教学计划的全面落实，进而影响培养目标的实现。

(2) 撰写毕业论文是检查学生学习质量的重要手段

写作毕业论文是检验学生学习质量的重要手段，它可以考查出学生已掌握知识的深度和广度，以及写作表述能力等，也是学生对自己"学业"水平的一次自我检查。

(3) 撰写毕业论文是培养学生研究能力的有效途径

大学的使命不仅仅是传授知识，更重要的是培养出具有创造能力的人才，培养学生运用所学知识独立分析问题和解决问题的

能力。而能力的培养，除平时教育，撰写毕业论文则是更为有效的途径。因为撰写毕业论文的过程，就是学生运用所学知识对某一专题分析、研究，发挥创造能力的过程，能力提高的过程。特别是学生在指导教师的精心指导和严格训练下，可以了解研究工作的门路，学会一些研究方法，从而培养出一种研究问题、分析问题和解决问题的能力，为今后教学、科研打下良好的基础。

(4) 毕业论文是发现并合理使用人才的重要参考项目之一

高水平的毕业论文能反映出作者具有较强的科研能力，业务素质好，在分配工作中是重要的参考项目之一。

因此，毕业论文对每一位即将告别大学生活而跨入工作岗位的毕业生来说，是必不可少而又十分重要的。

二、毕业论文的特点及其格式

一般说来，大学本科生第八学期开始撰写毕业论文，运用所学的数学各科有关知识，通过分析、研究，整理写成数学论文。因此，毕业论文除了具有数学论文的特点外，还具有自身的特点和要求。

1. 篇幅较长

因为学生是初学数学论文写作，为了达到毕业论文写作目的，通常要求毕业论文的篇幅适当长一些。一般的，一篇毕业论文的字数以6000～8000个汉字为宜。

2. 类型分明

从往届毕业生所写的数学论文的内容上看，毕业论文的类型分明。大体分为：数学教学研究（主要是中学教材教法）论文；数学思想方法论文；数学应用论文；数学专题研究论文。这与第一章讲的数学论文的分类是一致的。

写思想方法论文、应用论文者多；涉及初等数学、数学分析内容较多；高等代数、概率统计次之；复函、实函、泛函内容及数学建模的较少。

3. 格式单一

由于学生初学数学论文写作，论文的格式作统一要求，我们认为是必要的。这样，学生可以围绕所学学科的有关内容去选择论文的内容，推敲标题，提出问题、分析问题、解决问题，按规定的格式便于写作。如果没有一定的格式，有的论文会写的五花八门，达不到毕业论文写作的目的。

毕业论文的格式，可由以下几个部分组成：

标题

署名

内容提要

关键词

引言

正文

结论

致谢

参考文献

其中"引言"、"致谢"字样可以不写。

4. 论点明确

一篇毕业论文，必须有一个明确的中心论点，这个中心论点就是作者要在论文中表明的观点和主张，它是一篇毕业论文的中枢，并决定着论据和论证方法的采用。

如果论点不明确，论据就无法集中，从而论述也就不可能严密和有力，那么，这篇论文也就无法体现出作者提出问题、分析问题、解决问题的能力。所以，一篇毕业论文，在写作之前，要先明确一个中心论点，然后围绕中心论点再考虑几个从属论点。

5. 论据充实

在一篇毕业论文中，论据是证明论点的客观事实和科学的依据。即从搜集到的资料和数据，从大学期间所学到的知识、定义、公式、法则、定理等科学原理作为论据，辩证地说明或渗透或论证其论点。

6. 论证严密

论证的严密性是毕业论文又一重要特点。就是说，一篇毕业论文的论证，概念要准确清楚，判断、立论、推理、论述、论证要正确，逻辑要严密，能经得起推敲，决不能含糊，更不允许臆造。

第二节　毕业论文的选题

这里所说的毕业论文的选题，着重指学生在老师的指导下或学生独立选择撰写毕业论文的内容，即研究课题或研究范围(写什么)。

而毕业论文的标题(题目)，可以根据论文选择的内容，反复推敲，进而确定标题。

一、选题的原则

毕业论文的选题范围是广泛的，可以从所学专业知识的不同角度，结合自身的特点(思维能力、研究能力、兴趣爱好等)进行选题。

毕业论文的选题应遵循下述原则：

1. 选题要符合本专业的培养目标，满足教学的基本要求，有利于对学生独立工作能力的培养，重视开发学生的创造力；

2. 选题要有典型性、完整性，尽量结合实际问题和科学研究；

3. 选题应具有一定的深度和广度，要使学生在规定的时间内，经过努力有把握完成，以确保足够的工作量；

4. 选题应尽量做到因材施教，因人而宜，确保不同程度的学生都能足量完成任务。

在上述选题原则下，还要具体突出以下几点：

(1) 选择具有创新意义的内容为选题

这类选题难度大，要求作者从创新的角度探求新理论、新观点、新解释；研究新方法；对命题、定理给出新的证明。

如数学学报等一级刊物以及大学学报上发表的有关文章的内容，都属于有创造性的选题。

(2) 选择学科之间交叉点为选题

这类选题要求作者"移植"不同学科的理论、研究思想、数学方法，解决另一学科的某些问题作为选题。

如黎曼(Riemann)积分与勒贝格(Lebesgue)积分的本质差别、用正行列式解排列组合难题；概率论借助于数学分析工具，较好地描述、处理与解决了随机现象的有关理论和应用问题。反过来，数学分析中的有些问题，用数学分析的方法很难解决，如果采用概率方法，则容易处理了。如用大数定律证明函数收敛性。……

(3) 选择"改进"、"推广"的内容为选题

这类选题有一定的深度，要求作者对教科书中有关的概念、公式、法则、性质、定理或对某篇已发表的论文，进行订正、改进、推广等内容为选题。

如《关于R—积分的区间可列可加性》一文对数学分析中黎曼积分的区间可加性加以推广，给出了R—积分区间可列可加性；《实规范阵的特征值》一文给出了实规范阵的特征值的Rayleigh商极性定理，推广了Courant-Fisher的特征值的极性定理……。

(4) 选择某个数学专题的内容为选题

这类选题的论文多为常见。这类选题具有系统、综合，带有"总结"性的特点，要求作者从不同角度，有创作新意地分析、演绎、归纳出规律性的东西。

如《泰勒公式及其应用》；《几个重要的基本概念的正反叙述及其应用》；《黎曼积分与勒贝格积分的本质差别》；《向量组线性相关性的几种证明方法》；《构造概率模型的解题策略》等。

(5) 选择数学应用的内容为选题

这类选题是广泛的。要求作者运用所学知识，提出可行的方法，求出有价值的解。特别是数学与其他学科的渗透，优化数学模型的建立。

除上述选题内容外，对有关的学科的分支或对某专题的研究或对某著述综合性评述；对教材教法的研究等都是有意义的选题。

毕业论文的选题与标题（题目）的选择、确定是辩证的统一体。也就是说，在选题原则下，在选择的过程中，确定了课题内容，题目也就孕育在其中了，经过反复推敲，题目就确定了。

二、选题的方式

一般说来，毕业论文选题的方式有两种：一种是在老师指导下选题，即先由老师拟定选题而确定出题目，然后向学生公布，并由学生选择；另一种是学生自由选题，即学生在学习数学论文写作的基础上，自己选题并确定题目，然后征求老师的意见，加以完善。

在选题过程中，应提倡学生自己独立探索，自己选题。无论采用哪一种选题的方式，学生都应虚心接受老师的指导。

在选题过程中，师生共同拟定了如下一些题目，仅供读者参考。

《求极限的若干方法》；

《连续与一致连续》；

《关于函数项级数与函数序列的一致收敛性问题》；

《含参变量积分一致收敛性的判定》；

《几个重要不等式的证明》；

《曲线积分与曲面积分的计算方法》；

《向量组线性相关性的几种证明方法》；

《带参数的线性方程组的解法》；

《广义逆矩阵的性质及相互关系》；

《实对称正定矩阵的推广》；

《具有循环加群的环——循环环的性质及种类探讨》；

《二次曲线方程的分类与化简》；

《关于解析函数的等价定义》；

《关于解析函数的唯一性定理》；

《复积分的方法与技巧》；
《函数 Riemann 可积的条件及其特性》；
《Hilbert 空间所继承的欧氏空间的几何性质》；
《事件的概率及其解法》；
《分布函数与函数分布》；
《若干问题的概率解法》；
《假设检验与统计推断》；
《初始值问题的数值解法》；
《数学教学中渗透数学思想方法的途径》；
《在解题教学中培养学生的良好思维品质》；
《形象思维与数学教学》；
《直觉思维与数学教学》；
《创造性思维能力的培养途径》；
《数学之美》；
《数学教学中审美教育的途径》；
《数学概念教学的方法探索》；
《关系映射反演原则》；
《导数在证明不等式中的应用》；
《积分在求数列通项中的应用》；
《欧拉积分的应用》；
《凸函数及其应用》；
《泰勒公式及其应用》；
《多元函数的极值及其应用》；
《积分在求和中的应用》；
《微分在近似计算与误差估计中的应用》；
《矩阵在求递推式数列通项中的应用》；
《欧氏空间理论在求极值中的应用》；
《仿射变换在解决有关椭圆仿射性质的问题中的应用》；
《残数定理在计算实积分上的应用》；

《Banach空间中算子的不动点及其应用》；
《关于信息预报问题》；
《回归分析在教育测量中的应用》；
《随机存储策略问题》，等等。

第三节　毕业论文的写作

在前五章里，我们讲了不同类型数学论文的特点、撰写方法、写作要求及注意事项及其相应的例文分析，在此基础上本节具体介绍毕业论文的写作。

一、论文结构各项写作要求

前面讲了，毕业论文的结构由标题、署名、内容提要（摘要）、关键词、引言、正文、结论、致谢及参考文献等部分组成。

但是，在实际写作中，是按图6-1进行的。

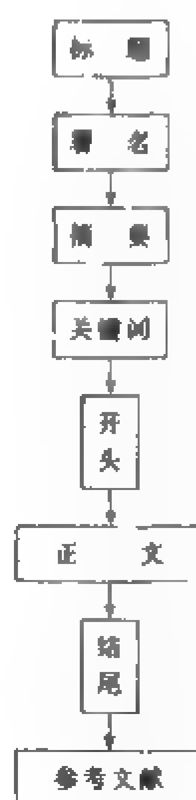


图6-1

下面对标题、开头、正文、结尾加以说明（与前述相同的不赘述）。

1．标题

标题，也叫题目。与前面讲的是一致的，毕业论文的标题是由准确得体、简短精练、结构合理的词语逻辑组合而成。

毕业论文的标题非常重要，好的标题能把论文的内容集中、鲜明、高度地概括起来，使读者

一眼就能看出论文的论点，论文所研究的范围和达到的深度。

如：《凸函数及其在不等式证明中的应用》；

《Γ函数与B函数及其应用》；

《含参变量瑕积分一致收敛性的判定》；

《由循环群决定的环》；

《随机问题的数学模型》等等，都是比较好的标题。

常见的毛病是：标题一般化，标题面大，标题啰嗦等。

如《计算行列式的方法》、《浅谈定积分的应用》等标题一般化；《高等数学在经济中的应用》、《论数学思想方法》等标题面太大；《浅谈数学中的基本思维方法——逻辑思维方法》等标题啰嗦。

由此可见，毕业论文的标题确定，必须在学习各门数学理论知识、查阅资料的过程中，借助灵感思维来获得毕业论文的选题，经过反复推敲、锤炼而得。只有这样，才能使标题确切、醒目、新颖、简洁。

2、开头

毕业论文的引言，即文章的开头。

开头在毕业论文中占有十分重要的地位，它是全文的起点和总纲，与正文息息相关，好的开头，能为正文的展开打下好的基础，写正文时会得心应手。

一般说来，要写好毕业论文的开头，通常采用开门见山的写法。即直截了当谈本题，讲清论文的主要意思或意义，扣题越紧越好，而不拐弯抹角，绕来绕去，离题太远。

写作时，要简练集中。即在开头部分的写作中，文字要力求简洁精练，要言不繁，而且意思要集中，篇幅要短，不可东扯葫芦西扯瓢、啰啰嗦嗦，把开头写得太长。一般说来，过长的开头不是好开头。

一般的，“引言”二字可省略。初学写作，“引言”的写法常与“内容提要”写成雷同。“关键词”之后，即为论文的开头。

开头的具体写法没有固定的模式，论文的题目不同，内容不

同、开头的方式也各不相同。

开头方式，常采用：目的、根据式开头、说明式开头、提要式开头、提问式开头；有时“空白”也是开头。

如《含参变量瑕积分一致收敛性的判定》的毕业论文，开头是这样写的：

含参变量瑕积分的内容，在教材及参考书中讲的很少，学起来感到困难。对此，本文对含参变量瑕积分的一致收敛性及其应用，作了系统的论证并揭示出应用规律。

这个开头写得符合上述要求，用语不多，眉目清晰，很自然地会引出正文。

如《Γ函数与B函数及其应用》一文关键词之后“空白”即为论文开头，一开始就写正文的第一分段标题。显得干净利落。

如有一篇毕业论文的标题为《浅谈数学基本思维方法——形象思维方法》。开头，啰啰嗦嗦的总是在“思维”的术语中绕来绕去，一个开头用了420个字，其离散程度，令人费解。

总之，根据毕业论文的内容，写明了“内容提要”，在“关键词”之后，开门见山，简明扼要开头，或直接写正文，效果比较好。高水平的论文的开头也常采用此种方法。

3. 正文

正文是毕业论文的主要部分，要反映研究的全部成果。如果说开头只是毕业论文的起点和总纲，那么正文是对研究对象的具体分析和论述、论证，从中总结出具有规律性的东西。

正文的结构形式，主要有以下三种。

(1) 递进式结构

这种结构形式，是把毕业论文的整体纵向展开为几个部分，按知识本身结构结合认知规律或逻辑层次一步比一步深入论述、论证，直到得出结论。

如《Γ函数与B函数及其应用》这篇毕业论文，就是采用了这种结构形式。由预备知识→Γ函数与B函数的定义及其实质→Γ

函数与 B 函数的性质→Γ 函数与 B 函数的关系→Γ 函数与 B 函数的应用。

这篇论文结构严密，创造性地给出有关性质的证明，各部分按严格的先后关系安排，逻辑性很强。

(2) 并列式结构

这种结构形式，是把毕业论文的中心论点分成几个从属论点，即按照内容的构成或事物属性将论文的整体分成几个部分。各部分之间不是先后关系，没有先后顺序。作者通过横向联系的几个部分的分析论述或论证，揭示出毕业论文的基本观点。

如《经济问题中的数学方法》这篇毕业论文就采用了这种结构形式。全文共分五个部分：一、导数在经济学中的应用；二、积分在经济学中的应用；三、微分方程在经济学中的应用；四、概率在产品检验和生产决策中的应用；五、统计思想在经济学中的应用。文中，结合典型的经济模型和实际问题，分析高等数学思想方法在经济学上的具体运用，以阐明高等数学处理复杂经济问题的优越性和重要性。

(3) 交叉式结构

交叉式结构，是指递进式结构和并列式结构交叉使用。当然，这种交叉并非可以任意交叉，而是要么以递进式为主，局部穿插并列式；要么以并列式为主，局部穿插递进式。必须在这个大前提下交叉运用二者。由于毕业论文的正文包含的内容较多，常采用交叉式结构形式。

正文写作的基本要求，集中到一点就是要在说理清楚的前提下，把正文写活。

在正文撰写中，掌握论证方法，进行有力的分析论证，是写好毕业论文的关键。

所谓论证就是讲道理，就是运用论据(数学知识、材料)来推导、证明、阐述论点正确的行为过程。要想把一个道理讲清楚，除了有论点、论据之外，还有一个论证过程。而要把论证过程写好，不仅

要抓住论据与论点的逻辑关系，而且要掌握和灵活地运用分析、综合、归纳、演绎、对比、类比、证明、反证等论证方法。

要写好正文，还要注意毕业论文的层次、段落、过渡、照应的含义。

层次是组成正文的意义单位，从整体上讲，有的论文的分段标题可表示正文的层次关系；而分段标题里所含内容，其层次是由一个或数个自然段组成，具有相对独立完整的意义。

安排层次有多种方式：总分式、并列式、先后主次式等，要灵活运用。

段落，即自然段。段落应能清晰反映出正文的层次，保持前后连贯性。

过渡，是正文中层次与层次、段落与段落之间连接的形式，在行文中起承上启下作用。

4. 结尾

结尾，是毕业论文的结束部分，应视论文的具体情况合理结尾。如果结尾收得好，则可以做到"意尽而言止"或"言有尽而意无穷"。

由于毕业论文的内容不同，深度不一，所以论文的结尾不完全一样。一般来说，结尾的具体方式有：

(1) 总结式结尾

总结式结尾即在毕业论文的结尾处，对全文的主旨进行简要的总结和概括，使读者有一个完整的概念，以加深印象，深化主题。

如专题研究论文，若取得了创新意义的研究成果，有的论文采用总结式(结论)结尾，以概括、准确的语言表达出该项研究的主要成果。笔者认为，毕业论文一般不采用总结式结尾。

(2) 展望建议式结尾

展望建议式结尾即在毕业论文结尾处，展望未来，提出建议。还有的干脆以"结尾与启示"的方式作为文章的最后一大部分。

一般来说，高水平的数学论文有的采用这种结尾方式。毕业论

文一般不采用展望建议式结尾。

(3) 自然式结尾

自然式结尾即在毕业论文写完正文内容后，不加任何言外之语，事终墨断，自然收尾。

从期刊上发表的数学论文看，不论是高水平的论文或一般水平的论文，大都采用自然式结尾。

由此可见，毕业论文采用自然式结尾比较好。这样，论文的开头与结尾既对照呼应又可避免"画蛇添足"。

诚然，文章的开头与结尾不可生搬硬套，强调一律。究竟如何结尾，应看具体情况，把尾结好。

二、论文的写作要求

为了提高毕业论文质量，达到写作毕业论文的目的，在毕业论文结构各项写作要求的基础上，对毕业论文写作进一步提出要求如下。

1. 实事求是

毕业论文，不论形式和内容，都不同于新闻报道、文艺小说或一般的实验报告、读书心得和工作学习总结。毕业论文是对某一论题所涉及全部资料进行整理、分析、取舍、提高，进而形成自己的论点，并将其付诸于文字的严肃的工作过程。因此，它的写作丝毫不能夸张和渲染，也不应牵强附会，更不能弄虚作假，而应一切从科学事实出发，实事求是地去研究和论述问题。只有这样，才能够写出有价值、有水平的毕业论文来。

2. 防止单纯模仿

在毕业论文的写作过程中，借鉴前人的研究思路、研究方法和写作技法，甚至重复前人的研究工作和某项实验都是可以的。

但是，这种借鉴或重复的目的，应该是为了学习和探索前人的方法和经验，从而得出自己的结论或新的见解，而并不只是一种单纯的模仿和机械的重复。

因此，在毕业论文的写作中，应避免和防止单纯模仿，而力求反映出作者自己的思想和见解。

3. 编写提纲

确定了选题，积累了资料，就应该谋篇构思，编写写作提纲，这是毕业论文写作的一个重要环节。

毕业论文的提纲，一般包括以下几个部分。

(1) 论文标题(包括副标题)；

(2) 论文的写作意图，包括选题理由、中心思想、总论点等；

(3) 内容纲要。

内容纲要是提纲的主要内容，也是论文结构的框架。包括从哪些方面、以什么顺序论述总论点或基本观点。一般毕业论文的框架，是由若干大标题、若干小标题有机组合而成的。大标题用论点句标出，小标题用观点句标出。

论文提纲的形式不一，常采用标题式提纲和提要式提纲。

① 标题式提纲

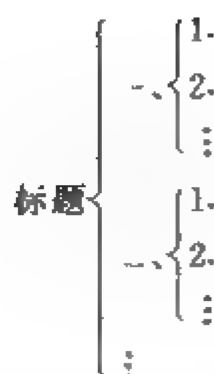
标题式提纲即以简要的语词构成的标题形式。它把该部分的内容概括出来，引出每一部分或每一段中所要讨论的主要内容。这种写法简洁、扼要。这是应用得最为普遍的一种写法。

② 提要式提纲

提要式提纲是把标题式提纲中每一内容的要点展开，对论文全部内容作粗线条的描述。提纲中的每一句子都是正文里每一段落的基础。这种提纲概括地写出各个层次的基本内容，其写法具体、明确，实际上是文章的雏形或缩写。

总之，编写提纲的意义在于启发写作的主动性和创作新意，写作时，既要遵循提纲，又不要过分受提纲的束缚，要边写边思考，不断开拓出新的思路。

标题式提纲一般如下表示：

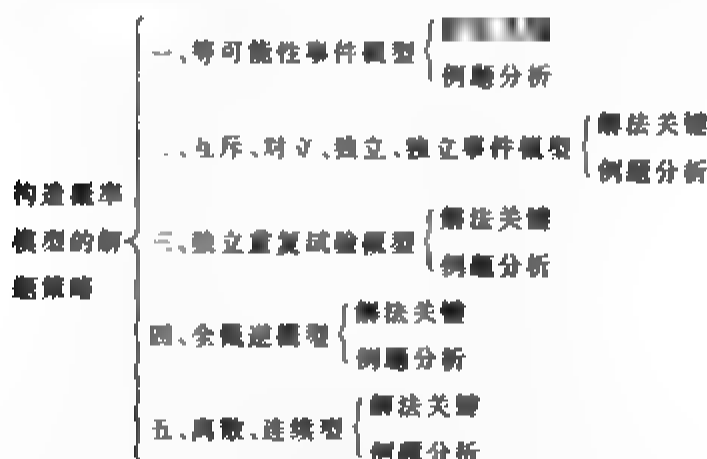


框图各部分之间存在着明显的先后次序，相互联系着，是逻辑严密的辩证统一体。

一般来说，内容纲要里的每一个大标题及小标题，都隐含着对所学或所感的问题，提出问题、分析问题、解决问题。即作设想、推导（演绎）、对结果说明，归纳出结论。

例如，针对概率习题难做，解题方法又不易掌握的实际情况，在占有资料的基础上，进行构思，能否写一篇论文，揭示求解概率的方法规律呢？经过反复思考，由古典概型计算概率的方法，受到启发，于是以《构造概率模型的解题策略》为题目，揭示计算概率的技巧方法。

编写提纲如下：



结论：对具体问题，要善于分析、归纳、分清属于哪一种概率模型、归类型，问题就容易求解了。

根据不同的课题内容，提纲的整体结构要合理，大标题、小标题观点鲜明，见解独到；材料的安排要详细得当，论证充分、严谨。

4. 起草、修改、定稿

毕业论文提纲确定之后，紧接着就是毕业论文的起草、修改和定稿，对研究成果进行具体描述，最终完成毕业论文。

(1) 起草

起草，即撰写毕业论文的初稿。

起草是论文形成全过程中最艰苦的写作阶段，它既是对论文从内容到形式精雕细琢的过程，又是作者对问题分析不断深化的过程。

起草的写法，一般是采用一气呵成法或分段写法或重点写法。

一气呵成法就是作者按照提纲要求，"一口气"完成草稿的写作，这种写法形成的初稿，主线清晰、论点鲜明、层次清楚。但语言修辞往往不够准确，文章写作技法粗糙，不简洁。

分段写法就是作者对论文的某个层次的内容已经胸中有数，可先写，其余层次考虑成熟后再写。即采取分段写作法形成初稿。全文写成后，再进行前后对照检查，使前后文风保持一致。

重点写法即先给出结论，再写出主要论据或围绕一个问题，展开分析，抓住重点问题写深写透。然后再对各个细节逐一补充，使全文逐步完善。

起草过程中，要注意以下几点：

① 尽力在草稿上把自己的想法全部写出来，使初稿内容丰富，"有血有肉"；

② 行文尽力合乎文体规范，论点、论据、论证纲目分明，逻辑清楚；

③ 草稿中，使用概念要清楚、运用判断要准确、进行推理要正确、借鉴要合理，引用要得当。

(2) 修改

修改就是对初稿的内容不断加深认识，对全文的论点、论据、

论证进行反复锤炼和推敲；对论文的表达形式、语言修辞、图表、标点符号不断优化选择的过程，使论文臻于完美。

修改过程中，要注意以下几点：

① 修改观点时应从两个方面进行，一是观点的订正，检查全文的论点是否有毛病，若有，应反复斟酌和推敲，予以订正；二是观点的深化，着重检查论文的观点是否有新意，有自己的见解。如果没有新意和自己的独特见解必须加以修正。

② 修改材料时，应着重注意论点与材料是否达到和谐、辩证统一。如果达不到则应相应地增加、删减，调整材料。

③ 修改结构时，应着重看全篇论文以论点为中心是否能纲举目张，论点、论据、论证是否得当。否则，要修改论文的结构，包括修改开头，调整层次、段落和结尾。

在修改的过程中，一定要虚心地请教老师，取得老师的帮助。

经过反复修改以后，毕业论文应突出下面三个特点：

- 新；
- 普遍性；
- 能得到实践验证。

从而，使论文能够更准确、更鲜明、更生动地表述自己的研究成果。

(3) 定稿

毕业论文的初稿，经过反复修改后，作者感到满意了，就可以定稿，并按论文体例规范要求，认真抄清。一式三份，装订成册。自己留一份，交给系里两份。

第四节　毕业论文答辩

毕业论文答辩，是指学生和老师在面对面的场合下，先由老师就毕业论文中的有关问题进行提问，学生稍作准备后直接向老师进行口头回答。由于是面对面的提问和回答，在学生回答的过程

中，老师还可能根据学生回答的情况再提一些新问题，让学生继续回答，以考核学生对课题研究的深度和应变能力。

由此可见，论文答辩不仅关系到毕业论文成绩的最后评定，也是对平时教与学的综合检验，特别对督促学生认真完成论文，确保论文的真实性和质量具有重要作用。同时，通过论文答辩，使学生的口头表达能力、思维能力、应变能力、创作能力得到锻炼和提高。

一、答辩前的准备与答辩

毕业论文的答辩是一项很重要而又非常细致的工作，要切实做好答辩前各方面的准备工作，使答辩能顺利进行。

1. 成立答辩委员会

毕业论文答辩委员会一般是由系组织成立，报校教务处备案。

系可根据情况分若干个答辩小组。答辩委员会由7～11人组成，设主任1人，副主任1～2人，秘书1人；答辩小组由3～5人组成，设组长1人，秘书1人。

答辩委员会全面负责答辩过程中的各项具体工作。如教师和学生搭配分组，时间、地点安排，成绩的最后评议等。

答辩小组的具体任务是：对本组的答辩进行具体组织安排；对学生进行答辩；对答辩成绩的初评，并报送答辩委员会。

2. 指导教师

毕业论文写作是高等学校教学过程中的一项不可缺少且具有重要意义的教学环节。为做好这项工作，第八学期开"数学论文写作课，30～40学时(或搞系列专题讲座)，其主讲教师、指导教师均为答辩委员会、答辩小组的成员。

(1) 指导教师要有良好的业务素质和较高的专业知识水平，要由系或教研室选派有经验的中级以上专业技术职称的教师担任。

(2) 学生在上"数学论文写作"课期间，主讲教师必须认真讲

解，并主动与指导教师联系。指导教师必须对所指导的论文题目做好准备工作，向学生推荐有关参考资料，指导学生确定题目和写作，指导学生科学地安排计划进度，并阶段性进行检查。指导人数一般不超过6人。

(3) 认真审阅学生的论文，组织学生参加答辩工作，并就论文内容的深度、水平、质量、价值、存在问题、论文写作期间的表现等对学生写出评语。

3. 学生在答辩前的准备

毕业论文答辩前应做好充分准备，积极参加答辩。学生在答辩前可从以下几个方面做好准备。

(1) 做好思想准备

参加毕业论文答辩，首先应有充分的思想准备。一方面要认识到答辩就是向老师汇报个人的研究成果，它关系到成绩的评定，关系到学位的获得，从思想上引起足够重视，树立必胜信心，力争答辩出好成绩，绝不能麻痹大意、马马虎虎，走过场；另一方面也不要害怕、紧张，精神尽量放松，大方、自然回答即可。

(2) 写好汇报提纲

写好毕业论文答辩汇报提纲是关键的一个环节，做好充分准备，对老师提出的问题，才能回答在点子上。

提纲的内容，一般来说，包括：

① 论文的标题

论文的标题是什么？自己为什么选择这个课题？研究这个课题有什么应用价值或理论意义？

② 论文的内容

这篇论文的主要内容是什么？主要说明或解决了什么问题？

③ 写作的技法

这篇论文结构是如何安排的？主要观点是什么？主要依据和论证方法是什么？提出和解决了哪些新问题(或从不同角度上说明论文写作新意)？

④ 主要参考文献

⑤ 老师还可能提出的问题

围绕毕业论文的内容，指导教师还可能从哪些方面、从什么角度上提出什么样的问题？自己应怎样回答？

这些都是学生答辩前应该做好充分准备的。同时，还要做好物质准备：如论文稿子、汇报提纲、主要参考资料、笔和笔记本等，带到会上，以备使用。

4. 答辩的进行

毕业论文答辩的过程，就是学生回答提问的过程，也是把准备答辩阶段所做的准备付诸实践的过程。其具体程序是：

(1) 答辩开始

答辩开始，由答辩委员会主任或答辩小组组长宣布答辩纪律、参加答辩名单和先后次序及其他安排和要求；

(2) 学生宣讲论文

学生宣讲论文，要求抓住关键、突出重点，简明扼要，不能念稿。时间一般不超过 15 分钟。教师提问，学生对提出的问题逐一作出认真回答。

(3) 学生回答

学生回答，这是答辩的关键时刻。总的要求是，回答要紧扣所提问题的本质，运用所学知识，按照答辩提纲所准备的有关内容，进行回答。并力求做到语言简洁流畅、说理清楚、有条不紊，普通话音质好。

对指导教师提出的疑问，要审慎回答。有把握的，可以略加思考，进行回答；没有把握的，要实事求是，虚心向老师表示弄明白了再回答，不要争辩。

(4) 答辩小结

答辩结束，答辩主持人或答辩教师根据毕业论文本身的写作水平和答辩的情况，作小结。

答辩结束，学生应从容、礼貌地退场。

关于毕业论文的答辩，各校情况不同，可以结合学校的实际情况，灵活安排。

二、成绩评定（供参考）

1. 评定成绩的标准

答辩结束后，由指导教师、评阅人及答辩小组所评定的成绩综合起来，经审核后定出毕业论文成绩。

毕业论文成绩一般分为优秀、良好、中等、及格、不及格五级。

优秀：

(1) 全面完成毕业论文各项工作；观点正确，有一定特色，有一定见解，论证充分、美观、整洁。

(2) 在毕业论文写作过程中，能较好地综合运用所学知识；有独立查阅文献资料及分析综合资料的能力；有较强的分析、运算、论证能力。态度认真，积极主动，刻苦钻研。

(3) 答辩中，叙述完整正确、思想清晰、简明；能正确回答所提出的问题，对所研究的课题有深人的理解。

良好：

(1) 全面完成毕业论文各项工作；观点正确，有见解；论证充分有条理，书写整洁。

(2) 在毕业论文写作过程中能反映出综合运用所学知识；有一定分析、运算能力。态度认真，积极主动，肯于钻研。

(3) 答辩时自述正确、清楚，能正确回答所提出问题；对所研究课题有一定理解深度。

中等：

(1) 能完成毕业论文所规定的任务；观点正确，叙述有条理，表达清楚。

(2) 在毕业论文写作过程中，能综合运用所学知识，具有一定查阅、分析、综合资料的能力，有一定分析、运算能力，工作态度认真。

(3) 答辩中自述正确，回答问题基本正确；能理解课题。

及格：

(1) 能完成毕业论文规定任务，观点基本正确，语句通顺。

(2) 在毕业论文写作中，综合运用所学知识一般；查阅文献资料及分析综合资料能力一般，分析、运算一般。

(3) 答辩中自述基本正确，回答问题无原则性错误。

不及格：

(1) 没有完成毕业论文所规定的任务。观点有原则性错误，在毕业论文写作中，综合运用所学知识差，查阅文献资料及分析综合资料能力差，分析、计算能力差。答辩中自述不清楚，不理解课题，基本概念模糊，经启发，仍不能回答。

(2) 抄袭他人作品者，不能参加答辩，按不及格论。

2. 总结

毕业论文结束后，应写出总结，旨在发现问题和吸取经验，总结报告上报校教务处备案。

学生毕业论文装订成册，一份交系资料室保存，一份装入学生档案。

第五节　毕业论文评析

例文 1

Γ 函数与 B 函数及其应用

数学系 93 本　刘英

内容提要　本文主要阐述了 Γ 函数与 B 函数的性质并给出详细证明，进而揭示出二者所具有的关系及其在数学分析、概率统计中应用的解题规律。

关键词　Γ 函数　B 函数　含参变量积分

一、预备知识

定理 1(柯西判法Ⅰ) 设 f 是在任何有限区间$[a,A]$上可积的正值函数,且 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x)=\lambda$

(i) 若 $p>1, 0\leqslant\lambda\leqslant+\infty$,则 $\int_a^{+\infty} f$ 收敛;

(ii) 若 $p\leqslant 1, 0\leqslant\lambda\leqslant+\infty$,则 $\int_a^{+\infty} f$ 发散。

(柯西判法Ⅱ)设正值函数 f 在$(a,b]$的任何内闭区间上都可积,且 $\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^p f(x)=\lambda$

(i) 若 $0<p<1, 0\leqslant\lambda<+\infty$,则瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(ii) 若 $p\geqslant 1, 0\leqslant\lambda<+\infty$,则瑕积分 $\int_a^b f$ 发散。

定理 2 设 f 为$[a,b]\times[c,+\infty]$上的连续函数,若含参变量非正常积分 $I(x)=\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在$[a,b]$上一致收敛,则 $I(x)$ 在$[a,b]$上连续。

定理 3 设 f 和 f_x 均为$[a,b]\times[c,+\infty]$上连续函数,若 $I(x)=\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在$[a,b]$上收敛,$\int_c^{+\infty} f_x(x,y)\mathrm{d}y$ 在$[a,b]$上一致收敛,则 $I(x)$ 在$[a,b]$在可微,且 $I'(x)=\int_c^{+\infty} f_x(x,y)\mathrm{d}y$

定理 4 设 $f(x,y)$在$[a,+\infty]\times[c,+\infty)$上连续,若

(1) $\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 y 在任何闭区间$[c,d]$上一致收敛,$\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 关于 x 在任何闭区间$[a,b]$上一致收敛。

(2) 设 $\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^{+\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}y$ 与 $\int_c^{+\infty}\mathrm{d}y\int_a^{+\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}x$ 中有一个收敛,则

$$\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^{+\infty} f(x,y)=\int_c^{+\infty}\mathrm{d}y\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$$

定理 5　设有函数 $g(y)$ 使得 $|f(x,y)|\leqslant g(y)$　$a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y<+\infty$，若 $\int_c^{+\infty} g(y)\mathrm{d}y$ 收敛，则 $\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。

公式 6　（χ^2 分布）设总体 $X\sim N(0,1)$，则随机变量 $\chi^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ 服从自由度为 n 的 χ^2 分布，记作 $\chi^2\sim\chi^2(n)$，其密度为

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}x^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$$

二、Γ 函数与 B 函数的性质

我们知道

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \tag{1}$$

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x \tag{2}$$

(1)称为伽马函数，(2)称为贝塔函数，二者统称为欧拉积分。

Γ 函数与 B 函数实质上是含参变量广义积分表示的两个特殊函数。

（一）Γ 函数的性质

1. Γ 函数的定义域

(1) 当 $s\geqslant 1$ 时，$x=0$ 不是被函数的瑕点，因此取 $p>1$ 都有 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p(x^{s-1}\mathrm{e}^{-x})=0$. 由柯西判别法 I 知(1)的积分是收敛的。

(2) 当 $s<1$ 时，$x=0$ 是被积函数的瑕点，此时，有

$$\Gamma(s)=\int_0^1 x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=I(s)+J(s)$$

$J(s)$ 对任何 s 都是收敛的

又　$$\lim_{x\to 0^+}x^{1-s}(x^{s-1}\mathrm{e}^{-x})=\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{-x}=1$$

故积分 $J(s)$ 在 $1-s<1$ 即 $s>0$ 是收敛的，而当 $1-s\geqslant 1$ 即 $s\leqslant 0$ 时发散。

综上可知 $\Gamma(s)$ 的定义域为 $s>0$。

2. Γ 函数的连续性

$\Gamma(s)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，由 $\Gamma(s)=I(s)+J(s)$，只证 $I(s)$ 及 $J(s)$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续即可。

在任何闭区间 $[a,b]$ $(a>0)$ 上对于函数 $I(s)$ 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，有 $x^{s-1}e^{-x}\leqslant x^{a-1}e^{-x}$，由于 $\int_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx$ 收敛，由定理 5 知 $I(s)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛；对于 $J(s)$，当 $1\leqslant x<+\infty$ 时有 $x^{s-1}e^{-x}\leqslant x^{b-1}e^{-x}$。由于 $\int_1^{+\infty} x^{b-1}e^{-x}dx$ 收敛，由定理 5 知 $J(s)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，于是 $\Gamma(s)$ 在 $s>0$ 上连续，即 $\Gamma(s)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续。

3. Γ 函数的可微性

首先考虑积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial s}(x^{s-1}e^{-x})dx=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\ln x dx$ 在任何闭区间 $[a,b]$ $(a>0)$ 上一致收敛。

考虑积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial s}(x^{s-1}e^{-x})dx=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\ln x dx$$

$$=\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}\ln x dx+\int_1^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\ln x dx$$

当 $s\geqslant a>0$ 时，$|x^{s-1}e^{-x}\ln x|\leqslant x^{a-1}|\ln x|$　$(0\leqslant x\leqslant 1)$ 而积分 $\int_0^1 x^{a-1}|\ln x|dx$ 收敛。故积分 $\int_0^1 x^{s-1}\ln x\cdot e^{-x}dx$ 当 $s\geqslant a>0$ 时一致收敛。

同样，当 $s\leqslant b$ 时，$|x^{s-1}e^{-x}\ln x|\leqslant x^{b}e^{-x}$　$(x\geqslant 1)$ 故积分 $\int_1^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\ln x dx$ 当 $s\leqslant b$ 时一致收敛。因此积分 $\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\ln x dx$ 当 $0<a\leqslant s\leqslant b$ 时一致收敛。由此可知 $\Gamma(s)$ 在 $a\leqslant s\leqslant b$ 上具有连续的导函数 $\Gamma'(s)$ 且可在积分号下求导

$$\Gamma'(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\ln x dx \tag{3}$$

由 a,b 的任意性可知 $\Gamma'(s)$ 在 $s>0$ 上连续且(3)式对一切 $s>0$ 皆成立。

类似地可证 $\Gamma''(s)$ 在 $s>0$ 上连续且可在(3)式积分号下求导。

一般地由数学归纳法可知，对任何正整数 n，$\Gamma^{(n)}(s)$ 在 $s>0$ 上都存在且连续并且可在积分号下求导数，得

$$\Gamma^{(n)}(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}(\ln x)^n dx \quad (s>0)$$

4. 递推公式 $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s) \quad (s>0)$

证 $$\Gamma(s+1)=\int_0^{+\infty}x^s e^{-x}dx$$

$$=-x^s e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+s\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx$$

$$=s\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx$$

$$=s\Gamma(s)$$

由此可知，$\forall\, s\in(0,+\infty)$，如果 $n<s\leqslant n+1$(其中 n 是非负整数)，即 $0<s-n\leqslant 1$ 有

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)=s(s-1)=\cdots$$
$$=s(s-1)\cdots(s-n)\Gamma(s-n) \tag{4}$$

特别地当 s 为正整数 $n+1$ 时(4)式可写成

$$\Gamma(n+1)=n(n-1)\cdots 2\cdot 1\Gamma(1)$$
$$=n!\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=n!$$

推论 1 由(4)式知，如果已知 $\Gamma(s)$ 在 $0\leqslant s\leqslant 1$ 上的值，那么在其它范围内的值，由它可计算出来；

推论 2 若对 $\forall\, s>-1$，令 $s!=\Gamma(s+1)$，则它可以作为 $n!$ 的推广(即把原来 $n!$ 中的 n 以自然数推广到大于 -1 的非负整数情形)。

5. Γ 函数的极值与凸性

因为对一切 $s>0$，$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx>0$

$$\Gamma''(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}(\ln x)^2\mathrm{d}x>0$$

因此$\Gamma(s)$的图形位于s轴上方且凸的。

又∵
$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}\mathrm{d}x=1$$

$$\Gamma(2)=\int_0^{+\infty}xe^{-x}\mathrm{d}x$$

$$=-xe^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-x}\mathrm{d}x=1$$

∴ $\Gamma(1)=\Gamma(2)$

∴ $\Gamma(s)$在$s>0$上有唯一的一个极小值点x_0落在$(1,2)$内。如图6-2所示。

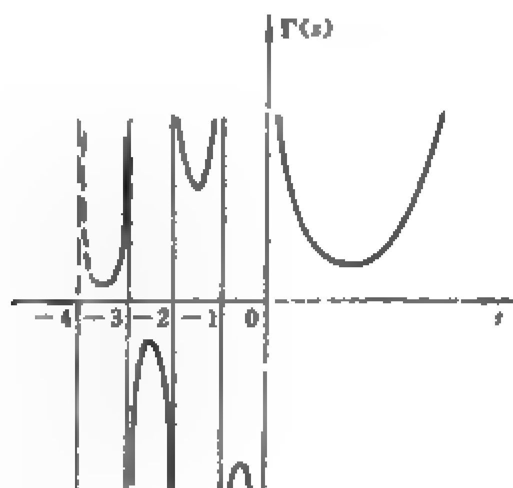


图 6-2

6. Γ函数的延拓

由递推公式可得 $\Gamma(s)=\dfrac{\Gamma(s+1)}{s}$ (5)

当$-1<s<0$时(5)式右端有意义，运用(5)式来定义左端函数$\Gamma(s)$在$(-1,0)$内的值，并且推得这时$\Gamma(s)<0$。同样利用$\Gamma(s)$已在$(-1,0)$内有定义，由(5)式又可定义$\Gamma(s)$在$(-2,-1)$内的值，而且这时$\Gamma(s)>0$，依次下去可把$\Gamma(s)$延拓到整个数轴(除s

0，$-1,-2,\cdots$外）。

7. Γ函数的其他形式

在(1)式中，令 $x=py$，则有

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}(py)^{s-1}e^{-py}p\,dy$$

$$=p^s\int_0^{+\infty}y^{s-1}e^{-py}dy \qquad (s>0,p>0) \tag{6}$$

在(1)式中，令 $x=y^2$，则有

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}y^{2(s-1)}e^{-y^2}2y\,dy$$

$$=2\int_0^{+\infty}y^{2s-1}e^{-y^2}dy \tag{7}$$

（二）B函数的性质

1. 定义域

由 $B(p,q)=\int_0^1x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ 的收敛性可知其定义域为 $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$

令 $f(x)=x^{p-1}(1-x)^{q-1}$，则 $f(x)$ 可能有两个瑕点 $x=0,x=1$（视 p,q 的值而定），故原积分可分为两个积分：$\int_0^{\frac{1}{2}}x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ 与 $\int_{\frac{1}{2}}^1x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ 来考虑使每一个积分中的被积函数至多含有一个瑕点。

先考虑积分 $\int_0^{\frac{1}{2}}x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$

(1) 当 $p\geqslant1$ 时，积分 $\int_0^{\frac{1}{2}}x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ 显然存在。

(2) 当 $p<1$ 时，$f(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上瑕点为 $x=0$，又函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ 上非负，故由

$$\lim_{x\to0^+}x^{1-p}[x^{p-1}(1-x)^{q-1}]=\lim_{x\to0^+}(1-x)^{q-1}=1$$

可知

当 $1-p<1$，即 $p>0$ 时 $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$ 收敛，

当 $1-p\geqslant 1$，即 $p\leqslant 0$ 时 $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$ 发散。

再考虑积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$

(1) 当 $q\geqslant 1$ 时，此积分显然存在

(2) 当 $q<1$ 时，$f(x)=x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上有瑕点 $x=1$，且非负，故由

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)^{1-q}[x^{p-1}(1-x)^{q-1}]=\lim_{x\to 1^-}x^{p-1}=1$$

可知：当 $q>0$ 时 $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$ 收敛，$q\leqslant 0$ 时，此积分发散。

综上可知当 $p>0$ 且 $q>0$ 时 $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$ 收敛，所以 $\mathrm{B}(p,q)$ 的定义域为 $p>0,q>0$。

2. 连续性

对任何 $p\geqslant p_0>0,q\geqslant q_0>0$，有

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1}\leqslant x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}$$

而 $\int_0^1 x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}\mathrm{d}x$ 收敛，由定理 5 知 $\mathrm{B}(p,q)$ 在 $p_0\leqslant p<+\infty,q_0\leqslant q<+\infty$ 上一致收敛，故而 $\mathrm{B}(p,q)$ 在 $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ 内连续。

3. 可微性

$\mathrm{B}(p,q)$ 在 $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ 内可微且存在任意阶连续偏导数。

考虑积分 $\int_0^1 \frac{\partial}{\partial p}[x^{p-1}(1-x)^{q-1}]\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\ln x\mathrm{d}x$

当 $p\geqslant p_0>0,q\geqslant q_0$ 时，恒有

$$|x^{p-1}(1-x)^{q-1}\ln x| \leqslant x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}|\ln x| \quad (0<x<1)$$

而积分 $\int_0^1 x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}|\ln x|\mathrm{d}x$ 收敛，故积分

$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$ 当 $p \geqslant p_0, q \geqslant q_0$ 时一致收敛。因此，当 $p \geqslant p_0, q \geqslant p_0$ 时可在积分号下求导得

$$B'_p(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\ln x\mathrm{d}x \tag{8}$$

并且 $B'_p(p,q)$ 是 $p \geqslant p_0, q \geqslant q_0$ 上的连续函数。

由 $p_0>0, q_0>0$ 的任意性知(8)式对一切 $p>0, q>0$ 皆成立，且 $B'_p(p,q)$ 是域 $p>0, q>0$ 上的二元连续函数。

同理可证 $B'_q(p,q)$ 是域 $p>0, q>0$ 上的二元连续函数，且 $p>0, q>0$ 时可在积分号下对 q 求导得

$$B'_q(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\ln(1-x)\mathrm{d}x$$

完全类似地用数学归纳法可证 $\frac{\partial^n B(p,q)}{\partial p^i \partial q^{n-i}}$ 在域 $p>0, q>0$ 上存在连续且

$$\frac{\partial^n B(p,q)}{\partial p^i \partial p^{n-i}} = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}(\ln x)^i[\ln(1-x)]^{n-i}\mathrm{d}x$$

4. 对称性　$B(p,q)=B(q,p)$

对 B 函数作变换，令 $x=1-y$ 即可得证。

5. 递推公式

$$B(p,q) = \frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1) \quad (p>0, q>1) \tag{9}$$

$$B(p,q) = \frac{p-1}{p+q-1}B(p-1,q) \quad (p>1, q>0) \tag{10}$$

$$B(p,q) = \frac{(q-1)(q-1)}{(p+q-1)(p+q-2)} \quad (p>1, q>1) \tag{11}$$

6. $B(p,q)$的其他形式

在式(2)中，令 $x=\cos^2\varphi$，则有

$$B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\varphi\cos^{2q-1}\varphi d\varphi$$

在式(2)中，令 $x=\frac{y}{1+y}(y\geqslant 0)$ 于是有

$$B(p,q)=\int_0^1\frac{y^{p-1}+y^{q-1}}{(1+y)^{p+q}}dy \tag{13}$$

三、Γ函数与B函数的关系

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\quad (p>0,q>0) \tag{14}$$

(1) 当 $p>0,q>0$ 时，由(6)式知

$$\frac{\Gamma(p)}{t^p}=\int_0^{+\infty}y^{p-1}e^{-ty}dy$$

一般地，

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}}=\int_0^{+\infty}y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}dy$$

两边同乘以 t^{p-1} 并且在$[0,+\infty]$上对 t 积分得

$$\int_0^{+\infty}\Gamma(p+q)\cdot\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt=\int_0^{+\infty}t^{p-1}dt\int_0^{+\infty}y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}dy$$

由式(12)知上式左端为 $\Gamma(p+q)B(p,q)$，故有

$$\Gamma(p+q)B(p,q)=\int_0^{+\infty}dt\int_0^{+\infty}t^{p-1}y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}dy$$

令 $f(t,y)=t^{p-1}y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}\quad (t\geqslant 0,y\geqslant 0)$

显然，$f(t,y)$在$[0,+\infty]\times[0,+\infty]$上非负连续，又当 $t>0$ 时，有

$$F(y)=\int_0^{+\infty}f(t,y)dt$$

$$=\int_0^{+\infty}t^{p-1}y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}dt$$

$$=e^{-y}y^{p+q-1}\int_0^{+\infty}t^{p-1}e^{-ty}dt$$

$$=e^{-y}y^{p+q-1}\frac{1}{y^{p}}\Gamma(p)$$

$$=y^{q-1}e^{-y}\Gamma(p)$$

当 $y=0$ 时，$F(0)=0$，易知 $F(y)$在$[0,+\infty)$上连续，而 $\varphi(t)=\int_0^{+\infty}f(t,y)\mathrm{d}y$

$$\therefore\quad \varphi(t)=t^{p-1}\int_0^{+\infty}y^{p+q-1}\mathrm{d}y=t^{p-1}\frac{\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}}$$

易知 $\varphi(t)$在$[0,+\infty)$上连续。

$\therefore\quad \int_0^{+\infty}f(t,y)\mathrm{d}t$ 关于 y 在任一$[0,T]\subset[0,+\infty)$上一致收敛，$\int_0^{+\infty}f(t,y)\mathrm{d}y$ 关于 t 在任一$[0,T]\subset[0,+\infty)$上一致收敛。由定理 4 知

$$\Gamma(p+q)\mathrm{B}(p,q)=\int_0^{+\infty}[y^{p+q-1}e^{-y}\int_0^{+\infty}t^{p-1}e^{-ty}\mathrm{d}t]\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{+\infty}y^{q-1}e^{-y}\Gamma(p)\mathrm{d}y$$

$$=\Gamma(p)\Gamma(q)$$

$$\therefore\qquad \mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

(2) 当 p,q 为正整数时，其结论可由式(11)直接出。

(3) 特别当 $p+q=1$ 时有

$$\mathrm{B}(p,1-p)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(1-p)}{\Gamma(1)}=\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin\pi p}$$

此公式又称为余元公式。

证　若令 $x=\frac{1-t}{t}$，则有

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\int_0^1(1-t)^{p-1}t^{1-p-1}\mathrm{d}t$$

$$=\mathrm{B}(p,1-p)$$

$$=\Gamma(p)\Gamma(1-p)$$

要证出

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+t}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin\pi p}$$

即可证得余元公式成立。下面用复变函数有关知识给出证明。

构造函数 $f(z) = \frac{z^p}{z(1+z)}$ 为辅助函数，$z=0, z=-1$ 为其奇点，且该多值函数又以 $z=0, z=\infty$(可去奇点)奇点。

取正实轴为支割线如图。

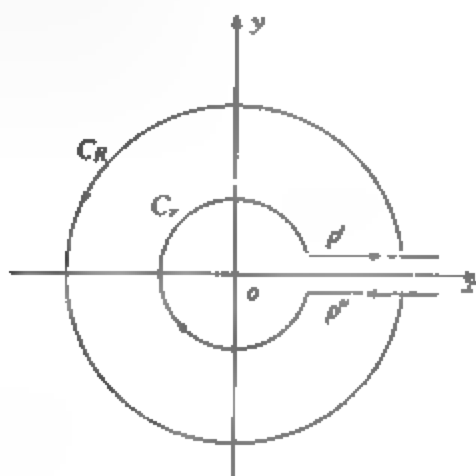


图 6-3

∴ 由残数实理

$$\operatorname{Res}_{z=-1} f(z) = \left[(z+1)\cdot\frac{z^p}{z(1+z)}\right]z=-1$$

$$=(-1)^{p-1}$$

$$=(-1)(-1)^p$$

$$=-(-e^{i\pi})^p$$

$$=-(\cos\pi p + i\sin\pi p)$$

又 ∵ $\int_{L'} + \int_{C_R} + \int_{L''} + \int_{C_r^{-1}} = \oint_c f(z)\mathrm{d}z$

$$= 2\pi i(-1)^{p-1}$$

$$= -2\pi i(\cos\pi p + i\sin\pi p) \qquad (*)$$

而上式左边有

(1) $\because \quad \lambda = \lim\limits_{|z| \to +\infty} zf(z) = \lim\limits_{|z| \to +\infty} z \cdot \dfrac{z^p}{z(1+z)} = 0$

$\therefore \quad \displaystyle\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = (\theta_2 - \theta_1)\lambda = 0$

(2) $\because \quad \lambda = \lim\limits_{|z| \to 0} zf(z) = \lim\limits_{|z| \to 0} z \cdot \dfrac{z^p}{z(1+z)} = 0$

$\therefore \quad \displaystyle\int_{C_r^{-1}} f(z)\mathrm{d}z = 0$

(3) L': $z = xe^{i \cdot 0} = x \quad (x > 0)$

$\therefore \quad \displaystyle\lim_{\rho \to +\infty} \int_{L'} f(z)\mathrm{d}z = \int_0^{+\infty} \frac{x^p}{x(1+x)}\mathrm{d}x$

(4) L'': $z = x^{i \cdot 2\pi} (x > 0)$, $z^p = x^p e^{i2\pi p}$, $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x$

$$\therefore \lim_{\substack{r \to 0 \\ R \to \infty}} \int_{L''} f(z)\mathrm{d}z = \int_{+\infty}^0 \frac{x^p e^{i2\pi p}}{x(1+x)}\mathrm{d}x$$

$$= - \int_0^{+\infty} \frac{x^p(\cos 2\pi p + i\sin 2\pi p)}{x(1+x)}\mathrm{d}x$$

$\therefore$ 由(*)式得

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{x(1+x)}\mathrm{d}x - \int_0^{+\infty} \frac{x^p}{x(1+x)}(\cos 2\pi p + i\sin 2\pi p)\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi i(-1)^{p-1}$$

$$= -2\pi i(\cos \pi p + i\sin \pi p)$$

$$= 2\pi\cos \pi p - i2\pi\sin \pi p$$

由复数相等的性质得

$$(1 - \cos 2\pi p) \int_0^{+\infty} \frac{x^p}{x(1+x)}\mathrm{d}x = 2\pi\sin \pi p$$

$$\therefore \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x^p}{x(1+x)}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin \pi p}$$

$$\therefore \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin \pi p}$$

四、Γ函数与B函数的应用

(一) 在数学分析中的应用

例 1　用 Γ 函数计算 $I_n=\int_0^{+\infty}x^{2n}e^{-x^2}dx$

解
$$I_n=\int_0^{+\infty}x^{2n}e^{-x^2}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(x^2)^{\left(n+\frac{1}{2}\right)-1}e^{-x^2}dx^2$$
$$=\frac{1}{2}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

例 2　用 B 函数计算

$$I_{m,n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^m x\,dx\qquad(m、n\text{ 为自然数})$$

解
$$I_{m,n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{2\cdot\frac{n+1}{2}-1}(\cos x)^{2\cdot\frac{m+1}{2}-1}dx$$
$$=\frac{1}{2}B\left(\frac{n+1}{2},\frac{m+1}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}+1\right)}.$$

例 3　用余元公式计算 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ 的值。

解
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$
$$=\sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)}$$
$$=\sqrt{\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}}}=\sqrt{\pi}$$

例 4 求由曲线 $|x|^n+|y|^n=a^n\quad(n>0,a>0)$ 所界面积。

解 设所求面积为 S，由题设得

$$S=4\int_0^a(a^n-x^n)^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}x\qquad\left(令\ t=\frac{x}{a}\right)$$

$$=\frac{4a^2}{n}\int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}(1-t)^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{4a^2}{n}\mathrm{B}\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}+1\right)=\frac{2a^2\left[\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right]^2}{n\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}$$

例 5 求下列积分的存在域并求其值。

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{1+x^n}\mathrm{d}x\qquad(n>0)$$

解 令 $x^n=t$，再令 $\frac{t}{1+t}=u$ 得

$$原式=\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{m}{n}-1}}{1+t}\cdot\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{m-n}{n}}}{1+t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{n}\int_0^1\frac{\left(\frac{u}{1-u}\right)^{\frac{m-n}{n}}}{1+\frac{u}{1-u}}\cdot\frac{1}{(1-u)^2}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{n}\int_0^1 u^{\frac{m}{n}-1}(1-u)^{\frac{n-m}{n}-1}\mathrm{d}u$$

由 B 函数定义域知积分的存在域为

$$\frac{m}{n}>0\quad 及\quad \frac{n-m}{n}>0\quad 即\quad 0<m<n$$

此时，$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{1+x^n}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\mathrm{B}\left(\frac{m}{n},\frac{n-m}{n}\right)$$

$$=\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$$

(二)在概率论中的应用

例 1　证明概率积分$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

证　令 $y=x^2$，则 $x=y^{\frac{1}{2}}, dx=\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}dy$

$$\therefore\qquad \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\int_0^{+\infty} e^{-y}\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}dy$$

$$=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

例 2　求下列分布密度中的常数 c，使之成为概率密度函数。

(1) $f(x)=\begin{cases} cx^{p-1}(1-x)^{q-1} & 0<x<1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}\qquad (p>0,q>0)$

(2) $f(x)=c\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}\qquad -\infty<x<+\infty$

解　(1) 由总概为 1 性有

$$\int_0^1 cx^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=1,\qquad cB(p,q)=1$$

$$\therefore\qquad c=\frac{1}{B(p,q)}$$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} c\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}dx=1$

$\because\quad f(x)=\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$为偶函数

令　$t=\frac{1}{1+\frac{x^2}{n}}, x=\left[n\left(t-\frac{1}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$

$$\therefore\qquad \text{原式左边}=2c\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}dx$$

$$=\sqrt{n}\,c\int_0^1 t^{\frac{n}{2}-1}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt$$

$$=\sqrt{n}\,cB\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \qquad c = \frac{1}{\sqrt{n}\,\mathrm{B}\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)}$$

例 3 求下列分布的期望与方差。

(1) 随机变量 $\zeta \sim \Gamma(t,\lambda)$ 即

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^t}{\Gamma(t)} x^{t-1} \mathrm{e}^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases}$$

(2) 贝塔分布 $\mathrm{B}(p,q)$

$$f_\zeta(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

解 (1) $E\zeta = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^t}{\Gamma(t)} x^t \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\lambda\Gamma(t)} \int_0^{+\infty} (\lambda x)^t \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathrm{d}(\lambda x)$$

$$= \frac{\Gamma(t+1)}{\lambda\Gamma(t)} = \frac{t\Gamma(t)}{\lambda\Gamma(t)} = \frac{t}{\lambda}$$

同理

$$E\zeta^2 = \frac{t(t+1)}{\lambda^2}$$

$$\therefore \qquad D\zeta = E\zeta^2 - (E\zeta)^2 = \frac{t}{\lambda^2}$$

(2) $\quad E\zeta = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x$

$$= \int_0^1 \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1} x \mathrm{d}x$$

$$= \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \cdot \mathrm{B}(p+1,q)$$

$$= \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \cdot \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)} = \frac{p}{p+q}$$

同理 $$E\zeta^2=\frac{(p+1)p}{(p+q+1)(p+q)},$$

$$D\zeta=E\zeta^2-[E\zeta]^2=\frac{pq}{(p+q+1)(p+q)^2}.$$

例 4 设随机变量 $\zeta_i\sim\Gamma(t_i,\lambda)$ $t_i>0,\lambda>0$ $i=1,2$，且 ζ_1 与 ζ_2 独立，则 $\zeta_1+\zeta_2\sim\Gamma(t_1+t_2,\lambda)$.

证 $\because$ $\zeta_i\sim\Gamma(t_i,\lambda)$

$$\therefore\quad f_{\zeta_i}(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{t_i-1}}{\Gamma(t_i)} & x\geqslant 0, i=1,2\end{cases}$$

由卷积公式知

当 $z<0$ 时 $f_{\zeta_1+\zeta_2}(z)=0$

当 $z\geqslant 0$ 时，

$$f_{\zeta_1+\zeta_2}(z)=\int_0^z\frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{t_1-1}}{\Gamma(t_1)}\cdot\frac{\lambda e^{-\lambda(z-x)}[\lambda(z-x)]^{t_2-1}}{\Gamma(t_2)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{e^{-\lambda z}\lambda^{t_1+t_2}}{\Gamma(t_1)\Gamma(t_2)}\int_0^z x^{t_1-1}(z-x)^{t_2-1}\mathrm{d}x$$

令 $x=zu$，故有

$$f_{\zeta_1+\zeta_2}(z)=\frac{e^{-\lambda z}z^{t_1+t_2-1}\lambda^{t_1+t_2}}{\Gamma(t_1)\Gamma(t_2)}\int_0^1u^{t_1-1}(1-u)^{t_2-1}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{\lambda e^{-\lambda z}(\lambda z)^{t_1+t_2-1}}{\Gamma(t_1)\Gamma(t_2)B(t_1,t_2)}$$

$$=\frac{\lambda e^{-\lambda z}(\lambda z)^{t_1+t_2-1}}{\Gamma(t_1+t_2)}$$

$\therefore$ $\zeta_1+\zeta_2\sim\Gamma(t_1+t_2,\lambda)$。

由此可见，将 Γ 函数与 B 函数及其关系应用于解概率题，可使繁杂的解题过程简化易懂，下面再举一难度大的题目，更显出妙用。

例 5 设 ζ 与 η 相互独立，分别是自由度为 n 及 m 的 x^2-分布的随机变量，试求

$$\zeta \quad \frac{\frac{\zeta}{n}}{\frac{\eta}{m}} \text{的密度函数}$$

解　自由度为 n 的 χ^2 分布的密度可由公式 6 给出。由此易求得 $\frac{\zeta}{n}$ 的密度为

$$f_{\frac{\zeta}{n}} = \begin{cases} \dfrac{n}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}(nx)^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{nx}{2}} & x > 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases}$$

$\frac{\eta}{m}$ 的密度为

$$f_{\frac{\eta}{m}} = \begin{cases} \dfrac{m}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)}(mx)^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{mx}{2}} & x > 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases}$$

再由商分布的公式得

$$\begin{aligned} f_{\zeta}(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(yx,x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{n}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} \cdot (nxy)^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{nxy}{2}} \\ &\quad \cdot \frac{m}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)}(mx)^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{mx}{2}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{n^{\frac{n}{2}}m^{\frac{m}{2}}}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)}y^{\frac{n}{2}-1}\int_0^{+\infty}x^{\frac{m+n}{2}-1}e^{-\frac{x(ny+m)}{2}}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

令　$x(ny+m)=t$，则有

$$f_{\zeta}(y) = \frac{n^{\frac{n}{2}}m^{\frac{m}{2}}}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)}y^{\frac{n}{2}-1}$$

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{ny+m}\right)^{\frac{m+n}{2}} e^{-\frac{t}{2}}(ny+m)dt$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\cdot n^{\frac{n}{2}}m^{\frac{m}{2}}\cdot\frac{y^{\frac{n}{2}-1}}{(ny+m)^{\frac{m+n}{2}}}$$

$$\cdot\frac{1}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{m+n}{2}}e^{-\frac{t}{2}}dt$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\cdot n^{\frac{n}{2}}m^{\frac{m}{2}}\cdot\frac{y^{\frac{n}{2}-1}}{(ny+m)^{\frac{m+n}{2}}}$$

$$\cdot\frac{1}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\cdot m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{y^{\frac{n}{2}-1}}{(ny+m)^{\frac{m+n}{2}}}$$

此密度称为参数为 n,m 的 F一分布，记作 $F(n,m)$，它是数理统计中常用的分布之一，还有 t一分布在求解过程也巧妙地引用 Γ 函数与 B 函数。不论在数学分析，还是概率统计中，运用 Γ 函数与 B 函数解题的关键都是经换元或变形，使其具有 Γ 函数与 B 函数的定义形式，然后再应用它们的性质及相互关系。

参考文献

[1] 华东师范大学数学系编．数学分析．北京：高等教育出版社，1995.

[2] 严士健等编．概率论与数理统计．北京：高等教育出版社，1995.

[评析]

1. 选题内容

《Γ函数与B函数及其应用》这篇毕业论文，属于数学教学研究论文范畴。

Γ函数与B函数是含参变量积分，统称为欧拉积分，既是教材的重点又是难点，它有着广泛应用。由于教材及参考书对这部分内容只作概述，学生学习感到困难，对此，该文作者以此作为选题内容，系统地论述了Γ函数B函数的概念、性质、关系，并给出详细证明，补充了富有启发性的典型例证，揭示出其应用的解题规律。

作者专业基础理论知识扎实，思路开阔，能从教材内容的深化、提高的角度选题，选题内容好，符合毕业论文选题原则和选题要求。

2. 题目确定

选择课题和论文题目是两个既有区别又相互联系的概念。一般说来，论文题目是在选择课题内容的基础上，反复推敲而确定题目，也可以先确定题目。由于作者选题内容好，经过锤炼，以《Γ函数与B函数及其应用》为论文题目，能正确反映出论文的中心内容和深度，便于论文展开写，做到了确切、简洁、醒目。

3. 撰写新意

作者不仅选题内容丰富，抓住教材的重点和难点，而且有自己的独立新见解，有创作新意。主要体现在：

(1) 能从教材内容深化、提高的角度选题；

(2) 对Γ函数与B函数的性质、关系等均给出规范化证明，特别是教材和许多书中未给证明的余元公式，作者用复变函数的有关知识给出严格证明；

(3) 对资料能精心选择、例题典型有启发性、能将数学分析、复变函数、概率统计的内容有机结合、渗透、分析、论证、归纳。

该论文的结构、写作技法，符合毕业论文写作要求。

4. 评析建议

综上所述，《Γ函数与B函数及其应用》是一篇水平较高的优秀毕业论文。

毕业论文虽说要求容量大，但也应注意数学论文要求“以少的篇幅，容纳多的信息”这句话的含义。该文可以适当简化。

例文 2

凸函数及其在不等式证明中的应用

数学系 93 本　韩纪月

摘　要　本文着重论述了凸函数不同定义的差异及其在不等式证明中的重要应用。

关键词　凸函数　不等式　Jensen 不等式

大家已经熟悉函数 $f(x)=x^2$ 的图像。它的特点是：曲线 $y=x^2$ 上任意两点间的弧段总在这两点连线下方。我们可以下这样一个定义：设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，若曲线 $y=f(x)$ 上任意两点间的弧段，总位于连接两点的直线之下，则称函数 $f(x)$ 是凸函数。

以上定义只是几何描述性的，为了便于凸函数的应用，用严格地分析式子来定义凸函数是十分必要的。

一、凸函数的定义及性质

凸函数的定义是多种多样的，大致总结一下，不外乎用下列七个命题之一给出，这些命题各有其长处，且对 $f(x)$ 的要求也不尽相同，使用时切实要注意。

(1) 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，$\forall\, x_1,x_2\in[a,b]$ 有 $f\left(\frac{x+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

(2) 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，$\forall\, x,x_2[a,b]$，且 $x<x<x_2$ 有

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x & f(x) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \end{vmatrix} \geqslant 0$$

(3) 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，$\forall x_1, x_2 \in [a,b]$，$\forall \lambda \in (0,1)$ 有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

(4) 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，$\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ 且 $x_1 < x < x_2$ 有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

(5) 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$\forall x, x_0 \in (a,b)$ 有

$$f(x) \geqslant f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

(6) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)$ 在 (a,b) 内单调递增。

(7) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二次可导，且 $f''(x) \geqslant 0$

说明：

① 若将上述七命题中"$\leqslant$"改为"$<$"，"$\geqslant$"改为"$>$"，$f'(x)$ 递增改为严格递增，便成为严格凸函数。

② 按对 $f(x)$ 要求的强弱来说：命题(1)最弱，只要 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义；命题(2)～(4)有所加强，因为它们蕴涵 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。(证明参见[1])。命题(5)和(6)又进一步加强，要求 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导。命题(7)最强，要求 $f(x)$ 在 (a,b) 内二次可导。例如，对于函数

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in (-1,1) \\ 2 & x = \pm 1 \end{cases}$$

容易验证它是命题(1)意义下的凸函数。显然，它不是(2)～(7)意义下的凸函数，因为 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上不连续。

在实际应用中，命题(1)～(4)意义下的凸函数由于对 $f(x)$ 的要求条件较弱，所以适用的范围非常广泛。虽然命题(5)～(7)对 $f(x)$ 要求强，但使用起来却简单的多。

③ 若将命题1)补充上 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则命题(1)～(4)是等价的(证明参见[2])。

以上我们阐述了关于凸函数的七个命题。其中，命题(1)～(4)命题(1)补充上 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可以作为凸函数的一般定义，而命题(5)～(7)可以作为凸函数的三个判定定理。

二、关于凸函数的一个重要不等式——Jensen 不等式

(1) 分析中的一般 Jensen 不等式：若 $f(x)$ 为区间 $[a,b]$ 上凸函数，对任意 $x_i \in [a,b]$，$x_i > 0 (i=1,2,\cdots,n)$ 且 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$，则有

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \qquad \text{(证明参见[3])}$$

(2) 概率中的 Jensen 不等式：设 ξ 为 (Ω,F,P) 上的 $r.V.$，若 $f(x)$ 是定义在某区间 Δ 上的连续的凸函数，则有 $f(E\xi) \leqslant Ef(\xi)$ (证明参见[4])

Jensen 不等式是凸函数的一个重要性质，因为每个凸函数都有一个 Jensen 不等式，因而它在一些不等式证明中有着广泛的应用。下文我们还会举一些实例来说明这点。

三、凸函数在不等式证明中的重要应用

在许多问题中，例如在数学分析、高等代数、函数论、概率论等中，都会遇到许多不等式证明的问题，其中有一类不等式利用凸函数的性质定理可以很简洁、巧妙地得到证明。

在利用凸函数证明不等式时，关键是如何巧妙的构造出能够解决问题的凸函数。下面，我就举例说明凸函数的这种重要作用。

(1) 凸函数的一般定义、性质的应用

例 1　若 $a,b>0$　$p,q>1$ 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 求证：$a^{\frac{1}{p}}\cdot b^{\frac{1}{q}}\leqslant\frac{a}{p}+\frac{b}{q}$。

分析：从所求证的不等式的形式来看，不容易直接找到合适的凸函数。因此，我们要对它进行一定的变形。不妨不等式两边同取自然对数，则有 $\ln(a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}})\leqslant\ln\left(\frac{a}{p}+\frac{b}{q}\right)$ 即 $\frac{1}{p}\ln a+\frac{1}{q}\ln b\leqslant\ln\left(\frac{a}{p}+\frac{b}{q}\right)$，由此式我们很容易找到合适的凸函数了。

证明：考察函数 $f(x)=-\ln x$　$(x>0)$

∵　$f''(x)=\frac{1}{x^2}>0$　∴　由命题(7)知 $f(x)$ 是 $x>0$ 时的凸函数。又　∵　$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$$\therefore\qquad -\ln\left(\frac{a}{p}+\frac{b}{q}\right)\leqslant-\frac{1}{p}\ln a-\frac{1}{q}\ln b$$

$$\ln\left(\frac{a}{p}+\frac{b}{q}\right)\geqslant\ln(a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}})$$

即

$$a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}}\leqslant\frac{a}{p}+\frac{b}{q}$$

例 2　设 $f(x)$ 是 $[-a,a]$ 上的凸函数，$g(x)$ 是 $[-a,a]$ 上的偶函数且在 $[0,a]$ 上递增，则

$$\left(\int_{-a}^{a}g(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x\right)\leqslant 2a\int_{-a}^{a}g(x)f(x)\mathrm{d}x$$

分析：从所求证的不等式的形式上看，它有点类似于切比雪夫不等式。这时，我们需要设法构造出一新的递增函数来满足切比雪夫不等式的条件。这样，问题就迎刃而解了。

证明：令 $q(x)=f(x)+f(-x)$，　$0\leqslant x\leqslant a$

由于 $g(x)$ 为偶函数，因此易证

$$\int_{-a}^{a}g(x)f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{a}g(x)q(x)\mathrm{d}x$$

又因为 $f(x)$ 为凸函数，于是由 $0\leqslant x_1<x_2\leqslant a$ 得

$$\frac{f(-x_1)-f(-x_2)}{-x_1-(-x_2)}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

∴ $$f(-x_1)+f(x_1)\leqslant f(-x_2)+f(x_2)$$

即 $$\varphi(x_1)\leqslant\varphi(x_2)$$

∴ $\varphi(x)$，$g(x)$ 都在 $[0,a]$ 上递增，由切比雪夫不等式得

$$\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^a g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_0^a g(x)\mathrm{d}x\int_0^a\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$\therefore a\int_{-a}^{a} g(x)f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2}\int_{-a}^{a} g(x)\mathrm{d}x\left[\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^a f(-x)\mathrm{d}x\right]$$

∴ $$\int_{-a}^{a} g(x)\mathrm{d}x\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x\leqslant 2a\int_{-a}^{a} g(x)f(x)\mathrm{d}x$$

例 3 设 $x>0$，$x\neq1$，$0<a<1$，则有

$$(x+1)^{a-1}>\frac{x^a-1}{x-1}\tag{1}$$

分析：首先，注意到在式(1)中，将 x 换 $1/x$ 后式(1)仍不变。故命题等价于：对于 $0<x<1$，式(1)成立。而当 $0<x<1$ 时，式(1)等价于

$$(1+x)^{1-a}(1-x^a)<1-x\tag{2}$$

这时，再考察一下 $f(x)=(1+x)^{1-a}(1-x^a)$ 的凸性就很容易证得式(2)成立。

证明：由以上分析，可设

$$f(x)=(1+x)^{1-a}(1-x^a)\quad(0<x<1)$$

∵ $$f''(x)=a(1-a)(1+x)^{-a-1}(x^{a-2}-1)$$

∴ 当 $0<a<1$，$0<x<1$ 时，$f''(x)>0$

∴ $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是严格凸函数

∴ $f(x)=f[(1-x)\cdot0+x\cdot1]<(1-x)f(0)+x\cdot f(1)$

即 $(1+x)^{1-a}(1-x^a)<1-x$ (2)

对于 $0<x<1$，式(2)等价于式(1)而 $0<x<1$ 时式(1)成立，

又等价于 $x>0$ 且 $x\neq 1$ 时式(1)成立。故命题得证。

例 4　设 $\varphi(t)$ 在区间 (m,M) 上二次可微，且 $\varphi''(t)>0$，则有

$$\varphi\left(\frac{p_1t_1+\cdots+p_nt_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\right)\leqslant\frac{p_1\varphi(t_1)+\cdots+p_n\varphi(t_n)}{p_1+\cdots+p_n}$$

其中，$t_i\in(m,M)$，$p_i>0(i=1,2,\cdots,n)$

分析：由于 $\varphi(t)$ 在区间 (m,M) 上二次可微且 $\varphi''(t)>0$，因此 $\varphi(t)$ 是 (m,M) 上的凸函数，由此知 $\varphi(t)$ 对命题(5)成立。选取 (m,M) 上恰当的固定点，利用命题(5)的结论问题就可得到解决。

证明：由题意易知 $\varphi(t)$ 是 (m,M) 内的凸函数。由此，$\varphi(t)$ 对命题(5)成立。

令　$t_0=\dfrac{p_0t_1+\cdots+p_nt_n}{p_1+\cdots+p_n}$，显然 $t_0\in(m,M)$ 由命题(5)得

$$\varphi(t)\geqslant\varphi(t_0)+\varphi(t_0)(t-t_0)$$

即有

$$\varphi(t_0)\leqslant\varphi(t)-\varphi'(t_0)(t-t_0)\tag{1}$$

在式(1)中，分别令 $t=t_i$　$(i=1,2,\cdots,n)$ 得

$$\varphi(t_0)\leqslant\varphi(t_i)-\varphi'(t_0)(t_i-t_0)\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{2}$$

不等式(2)的两边同乘以 p_i 得

$$p_i\varphi(t_0)\leqslant p_i\varphi(t_i)-\varphi'(t_0)p_i(t_i-t_0)\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{3}$$

把(3)的 n 个不等式相加整理得

$$\varphi(t_0)\leqslant\frac{p_1\varphi(t_1)+\cdots+p_n\varphi(t_n)}{p_1+\cdots+p_n}$$　命题得证

2. Jensen 不等式在不等式证明中的应用

例 1　设 $x_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$.　证明

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}\leqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\tag{1}$$

且当且仅当所有 $x_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 全部相等时，等号成立。

分析：观察不等式 $\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}\leqslant\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}$ 的形式，易知两边取对数变成 $\dfrac{\ln x_1+\cdots+\ln x_n}{n}\leqslant\ln\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}$ 这样就很容易找出合适

的凸函数了。

证明：首先考察 $f(x)=-\ln x \quad (x>0)$ 的凸性。

$\because \quad f''(x)=\frac{1}{x^2}>0$ 由命题(7)知 $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的严格凸函数。

由 Jensen 不等式知，当 $x_i>0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$ 不全相等时有

$$-\ln\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}<-\frac{1}{n}(\ln x_1+\cdots+\ln x_n)$$

及
$$-\ln\frac{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}}{n}<-\frac{1}{n}\left(\ln\frac{1}{x_1}+\cdots+\ln\frac{1}{x_n}\right)$$

整理后便得式(1)，且当且仅当所有 $x_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 全部相等时，等号成立。

例 2　设 $p_i, a_i>0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$，则有

$$\sqrt[p_1+p_2+\cdots+p_n]{a_1^{p_1}a_2^{p_2}\cdots a_n^{p_n}}\leqslant\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}$$

分析：首先注意到 $\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{p_1+\cdots+p_n}=1$ 且 $\frac{p_i}{p_1+\cdots+p_n}>0$ 因此，可以构造这样一个离散型随机变量 ζ，使其 $p.m.f.$ 为 $p(\zeta=a_i)=\frac{p_i}{p_1+\cdots+p_n} \quad (i=1,2,\cdots,n)$ 这样，选取适当的凸函数，利用概率 Jensen 不等式就能解决问题了。

证明：设 ζ 为 $r.v.$，取 $f(x)=-\ln x$，则由 $f''(x)=1/x^2>0$ 知它是 $(0,+\infty)$ 上的连续凸函数，于是由概率 Jensen 不等式知。

$$-\ln E\zeta\leqslant E(-\ln\zeta) \quad 即 \quad \ln E\zeta\geqslant E\ln\zeta \qquad (1)$$

对于正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，今构造一离散型 $r.v.\ \zeta$，使其 $p.m.f.$ 为

$$p(\zeta=a_i)=\frac{p_i}{p_1+\cdots+p_n}, \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

则利用式(1)得

$$\ln\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{p_1+\cdots+p_n}\cdot a_i\geqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{p_1+\cdots+p_n}\ln a_i$$

即 $$\ln(a_1^{p_1}a_2^{p_2}\cdots a_n^{p_n})^{\frac{1}{p_1+\cdots+p_n}}\leqslant\ln\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{p_1+\cdots+p_n}a_i,$$

于是得

$$\sqrt[p_1+p_2+\cdots+p_n]{a_1^{p_1}a_2^{p_2}\cdots a_n^{p_n}}\leqslant\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}$$

例 3　设 $p(x)\geqslant 0$，$\int_a^b p(x)\mathrm{d}x=1$，$f(x)>0$. 则有

$$\exp\left(\int_a^b p(x)\ln f(x)\mathrm{d}x\right)\leqslant\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x$$

分析：乍一看，本题好像无法应用 Jensen 不等式来解决，因为 Jensen 不等式是离散型的，而要证明的是积分不等式。其实不然，在引入定积分概念时，是通过分割求和求极限来完成的，因此，可以通过分割求和求极限的方法把离散型不等式转化为积分不等式，问题就解决了。

证明：前面例题已讨论过 $f(x)=-\ln x(x>0)$ 是凸函数。因此，对任意的 $p_i,a_i>0(1\leqslant i\leqslant n)$ 由于 $\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=1$，因而有

$$-\ln\left(\frac{p_1}{p_1+\cdots+p_n}a_1+\frac{p_n}{p_1+\cdots+p_n}a_n\right)$$

$$\leqslant\frac{p_1}{p_1+\cdots+p_n}\cdot(-\ln a_1)+\cdots+\frac{p_n}{p_1+\cdots+p_n}(-\ln a_n)$$

即有

$$\exp\left(\frac{p_1\ln a_1+\cdots+p_n\ln a_n}{p_1+\cdots+p_n}\right)\leqslant\frac{p_1a_1+\cdots+p_na_n}{p_1+\cdots+p_n}$$

现令 $$p_i=p\left[a+\frac{i}{n}(b-a)\right]\cdot\frac{b-a}{n}$$

$$a_i=f\left(a+\frac{i(b-a)}{n}\right)\qquad(1\leqslant i\leqslant n)$$

代入上式　令 $n\to+\infty$ 立刻得

$$\exp\left(\frac{\int_a^b p(x)\ln f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}\right)\leqslant\frac{\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}$$

即

$$\exp\left(\int_a^b p(x)\ln f(x)\mathrm{d}x\right)\leqslant\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x$$

参考文献

[1] 沈燮昌，邵品琮编著．数学分析纵横谈．北京：北京大学出版社，1991.

[2] 华东师范大学数学系编．数学分析（下册）．北京：高等教育出版社，1980.

[3] 戴朝寿．一类不等式的概率证法．曲阜师范大学学报（自然科学报），1985.

［评析］

1．选题内容

《凸函数及其在不等式证明中的应用》这篇毕业论文，属于数学应用论文范畴。

凸函数在数学分析、函数论、泛函分析、最优理论等，都有着重要的应用。由于数学分析教材在函数的凸性与拐点一节给出凸函数的定义、性质定理，其应用例题无有。对此，该文作者以此作为选题内容，着重论述了凸函数不同定义的差异及其在不等式证明中的重要作用。

作者专业理论知识扎实，思维敏捷，能从教材概括论述中，系统地理出易懂的凸函数 7 种定义形式，并简洁、清晰地揭示出定义的内涵、外延；突出了它在不等式证明中的应用规律。选题内容好，符合毕业论文的选题要求。

2. 题目确定

拟定毕业论文的题目,需要精心琢磨,才能写出紧扣内容,准确表达中心内容含义的题目。由于作者选题内容好,以《凸函数及其在不等式证明中的应用》为题目,能正确反映出论文主旨和范围,基本做到了确切、简洁、醒目。

按照题目《凸函数及其在不等式证明中的应用》的要求,对凸函数的有关论述、论证要加强。从该文撰写的内容上看,原题目改为《凸函数在不等式证明中的应用》更为贴切。

3. 撰写新意

作者不仅选题内容弥补了教材"应用"的薄弱环节,而且有自己的独立新见解。主要体现在:

(1) 能从教材概述中,系统地理出凸函数7种定义形式,浅显易懂的揭示定义的内涵和外延,抓住了教材内容的关键;

(2) 论文重点突出,例题典型,富有启发性,例题论证分析的好,归纳出:利用凸函数证明不等式时,关键是巧妙的构造出能解决问题的凸函数。

论文的结构、写作技法,符合毕业论文的写作要求。

4. 评析建议

综上所述,《凸函数及其在不等式证明中的应用》是一篇优秀毕业论文。

作者专业基本理论知识扎实,具有一定的研究、写作能力,该论文应在理论上系统论述、论证;在应用上尽力渗透到多学科上。

例文 3

经济问题中的数学方法

数学系 93 本　刘　峰

摘　要　本文结合典型的经济模型和实际问题，分析高等数学思想方法在经济学上的具体运用，以阐明高等数学处理复杂经济问题的优越性和重要性。

关键词　弹性　边际　线性回归分析　统计思想　线性规划

预备知识：

为了更方便地研究经济问题，我们将以下涉及到的经济函数概括如下：

1．总成本函数

企业产品总成本分为固定成本和变动成本两部分。在一定时期内，生产商品的固定成本是保持不变的；变动成本与产量成比例，于是这个函数表达式：$c(x)=c_1+c_2x$，其中 c_1 为固定成本，c_2 为单位变动成本，x 为产量。

2．价格函数

在日常经济业务中，商品价格是随着销量的增加而降低的，因此价格函数是减函数，表达式为：$p=p(x)$，$x\in[0,b]$，p 为价格，$p>0$，x 为销量。

3．需求函数和供给函数

某段时间内某种商品需求量 Q_d 与商品单位价格 p 的关系用需求函数表示：$Q_d=f(p)$；同样的，供给量 Q_s 与单位价格的关系用供给函数表示为：$Q_s=g(p)$。

4．总收入函数

企业总收入 R 与单位价格 p 和销量 x 成正比，即总收入函数表示为：$R=R(x)=p\cdot x$，$x\in(0,b]$.

5. 利润函数

企业利润 L 是总收入中扣除产品总成本。即利润函数表示为：$L(x)=R(x)-c(x)=p\cdot x-(c_1+c_2x)$。

随着现代科技、经济的迅速发展，社会科学逐步向跨学科、综合性方向发展。在经济领域，随着现代企业核算制度和股份制公司的确立，再简单运用以上函数本身不能正确、有效地解决复杂经济问题，这促使微积分、概率统计及运筹学等高等数学思想被广泛应用到经济预测、财务分析及决策和经济管理等各个方面。这对于解决实际经济问题，促进社会主义市场经济的发展都有着重要意义。本文就典型问题分析如下。

一、导数的经济学应用

我们知道，当一个变量相应于另一变量的无穷小而变化时，导数提供了关于这种变化的大小和方向的信息。由于经济领域研究的实际问题就是变量随其他变量的变化问题，因而导数在经济学中有极其广泛的应用。

(一) 用导数定义的几个经济学概念

1. 在经济学中，往往用"边际"来揭示某一经济函数的变化率以"边际成本"为例：

边际成本定义为产量增加一个单位时所增加的总成本。对于产量只取整数单位的产品而言，一个单位变化是最小变化。现假设产品数量是连续变化的，于是产品单位可以无限细分。如果产量已经是 x，在此水平上若产量从 x 增至 $x+\Delta x$，那么总成本相应的增量是 $\Delta c=c(x+\Delta x)-c(x)$，它与 Δx 的比为：$\frac{\Delta c}{\Delta x}=\frac{c(x+\Delta x)-c(x)}{\Delta x}$。这表示在 x 和 $x+\Delta x$ 之间总成本平均变化率，令 $\Delta x\to 0$，取极限就可以得到边际成本

$$c'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta c}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c(x+\Delta x)-c(x)}{\Delta x}$$

显然，它近似地表示若已经生产了 x 个单位产品，再增加一个单位产品总成本的增加量。

同样的道理，我们可以用导数定义边际收入、边际利润、边际需求等。下面我们以边际利润为例结合例题分析这一概念实际意义。

例1　某企业对销售分析后指出，总获得 L 元与每月产量 x 吨(t)关系为：$L(x)=250x-5x^2$，试确定每月生产 20t、25t、35t 的边际利润。

解：仿边际成本的定义：边际利润为总利润函数的导数，表示产量为 x 单位时，总利润的变化率，依题意知：$L'(x)=250-10x$，

$$L'(20)=250-10\times 20=50;$$

$$L'(25)=250-10\times 25=0;$$

$$L'(35)=250-10\times 35=-100.$$

上述结果表明，当产量为每月 20t 时，再增加 1t，利润将增加 50 元；当产量为 35t 时，再增产 1t，利润将减少 100 元。

通过这个实际例子，我们可以看出，当企业决策时，如果采用边际利润进行分析，可以减少企业投资的盲目性，使企业在扩大再生产时了解投资前景，减少企业投资损失。另外，如果该企业是多种产品综合企业，通过以上这种方法计算出各种产品的边际利润率(边际利润与总利润之比)，而使生产资金转向边际利润率相对较大的产品，这使企业资金流向更加合理，从而提高了经济效益，为国家、企业多创收入，不仅有利于企业本身，更有利于社会主义市场经济的发展。

2. 弹性的概念

在高等数学定义的导数实质上是函数 $f(x)$ 在点 x 的变化率。如果将这一概念直接应用到经济学的实际问题中，变量都有了实际意义。但是对于不同内容的经济业务来说，涉及到的变量及其单位可能不同。在这种情况下，比较不同变量相对另外几种变量的变化情况，直接运用导数概念就不太合理，我们必须采用一种与任何

单位都无关的度量方法。在经济学中，这一想法是通过“弹性”这一概念来实现的。

所谓弹性就是某种变量(y)的相对改变量与另一变量(x)的相对改变量之比。也就是说，弹性反映了一个变量相对于另一变量的变化程度。

如果运用数学符号，假设 y 与 x 存在函数关系 $y=f(x)$，则 y 对 x 的弹性表示为

$$\epsilon = \frac{\Delta y}{y}\Big/\frac{\Delta x}{x} = \frac{x}{y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

我们再以极限为工具，把弹性进一步扩展为：$\epsilon = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{y}\Big/\frac{\Delta x}{x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{x}{y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x) \cdot \frac{x}{y}$，这我们称为 y 在 x 点的弹性。

例 2　若某商品的需求函数为 $x=100-2p$，p 为价格，讨论其弹性变化。

解　仿弹性定义：需求 x 对价格 p 的弹性为 $\epsilon = \lim\limits_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta x}{x}\Big/\frac{\Delta p}{p} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} \cdot \frac{p}{x} = (-2) \cdot \frac{p}{100-2p} = -\frac{p}{50-p}$.

于是当 p 取某个确定值时，在此价格处的点弹性也就确定了。我们首先分析当需求相对变化率与价格相对变化率相等即 $\epsilon=1$ 时的 p 值，由 $|\epsilon| = \left| -\frac{p}{50-p} \right| = 1$，知 $p=25$.

当 $0<p<25$ 时，$|\epsilon|<1$，即在这一价格范围内，随价格减小，ϵ 也是递减。也就是说，在这时若采取压价措施，因需求增加的百分比小于价格降低的百分比，企业总收入会减少。

当 $25<p<50$ 时，$|\epsilon|>1$，在这一价格范围内，$|\epsilon|$ 随 p 增加而增加，如果这时采取提价措施，因需求下降百分比大于价格增加的百分比，企业总收入也会减少。

通过以上分析，如果该企业进行价格调整时，参照以上分析方

法，当弹性$|\varepsilon|>1$时，采取降价措施，能达到薄利多销的目的；当弹性$|\varepsilon|<1$时，可以适当提高价格，不会因盲目降价促销而影响企业利润。否则，随意调价会因产品积压或不能收回成本而使企业陷入困境，难以在竞争中谋求发展。

(二) 导数在最大化、最小化问题的应用

在数学分析，我们可以利用导数对某一函数进行分析，通过判断稳定点是否满足最值的充分条件来求函数最值。这一思想运用到经济上可以进行经济业务最大化、最小化分析，通过分析来在达到有效、合理安排生产，最大限度地取得利润，最小限度地消耗能源与原料。

1. 最大利润产出水平的确定

企业生产的主要目的之一就是获取利润，利润函数 $L(x)=R(x)-c(x)$ 被称为企业目标函数。为了求出使利润最大的产出水平，首先，必须满足最大值的必要条件：一阶导数 $L'(x)=0$，求 $L'(x)$ 得：$R'(x)-c'(x)=0$ 即 $R'(x)=c'(x)$。因此，利润最大化的一阶条件要求，边际成本等于边际收益。其次，为了保证上式的解 x_0 是使利润最大的产出水平，还必须满足最大值的充分条件：当 $L'(x)=0$ 时，$L''(x)<0$。于是又有 $L''(x)=R''(x)-c''(x)<0$，即：$R''(x)<c''(x)$。在经济学上意味着：当产出水平满足 $R'(x)=c'(x)$ 时，若 $R'(x)$ 变化率($R''(x)=\mathrm{d}(R'(x))/\mathrm{d}x$)小于 $c'(x)$ 的变化率，这时产出水平使利润最大。

例 3　已知某厂商在完全竞争中总收入函数与总成本函数分别为：$R(x)=18x$ 与 $c(x)=x^3-9x^2+33x+10$，求

(1) 利润最大化的产出水平；

(2) 最大利润。

解(1) $L(x)=R(x)-c(x)$

$$=10x-(x^3-9x^2+33x+10)$$

$$=-x^3+9x^2-15x+10$$

于是 $L'(x)=-3x^2+18x-15=0$

有 $x-1$ 或 $x\ \ 5$

而 $L''(x)=\ \ 6x+18$，当 $x=5$ 时，才有 $L''(x)<c$

因此，利润最大时产出水平为 $x=5$

解(2) 最大利润为 $L(5)=\ \ 5^3+9\cdot 5^2\ \ 15\cdot 5+10\ \ 15.$

同样道理，我们可以根据需要利用数学微分法对其它经济函数牵扯到的经济业务进行最大、最小化分析(最小值条件 $L'(x)>0$)。-般地，涉及到成本的求其最小值、涉及到收益的求其最大值，这里不一一枚举。

2. 经济订货量的确定

在企业对商品、原料库存过程，由于进货储存等环节关系到许多费用，以减少资金占用和加速资金周转角度看，必须尽量减少这些费用，也就要减少存货、订货数量，但同时又必须满足正确的生产需要，如何才能解决这 -问题呢？假设订货时排除随机因素，增加采购次数，可使存货数量降至较低水平，使储存费用降低。但是这时采购费用又随采购次数增加而增加。假定全年存货需要量为 D，经济订购量为 Q，p 为每次采购费用，k 表示每单位存货维持一年的费用。于是采购次数为 $\frac{D}{Q}$，平均存货量为 $\frac{Q}{2}$。-年所需总费用 $F(Q)=\frac{D}{Q}\cdot p+\frac{Q}{2}\cdot k$，我们按求极值的条件：(1) $F'(Q)=\ \ \frac{D}{Q^2}\cdot p+\frac{1}{2}k\ \ 0$，于是 $Q_0=\sqrt{2Dp/k}$，(2) $F''(Q)>0$ 时费用最小，即：$F''(A)=\frac{2D}{Q^3}\cdot p>0$，而 $F''(Q_0)>0$，则经济订购量为 $Q_0-\sqrt{2Dp/k}$

例 4　某企业全年需用 A 材料 12000kg，每次采购费用 50 元，储存一年单位费用 0.75 元，求最佳经济订货量。

解　假设经济订购量为 Q，采购费用 $\frac{12000}{Q}\times 50$，储存费用 $\frac{Q}{2}\times 0.75$，很显然，一减 -增，这可以通过右图直观地反映出来。

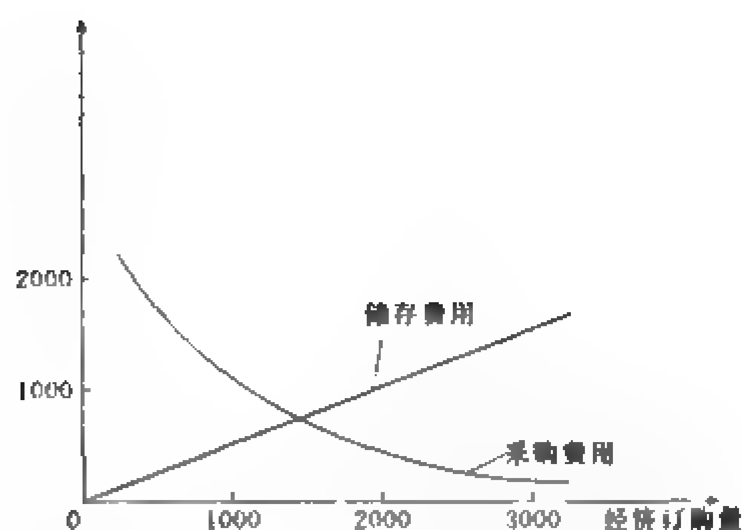


图 6-4

利用公式：

$$Q = \sqrt{2Dp/k} = \sqrt{\frac{2 \times 12000 \times 50}{0.75}} = 1500\text{kg}$$

这时全年储存费用采购费用相等(这可以通过式(1)变形而来：$\frac{Q}{2} \cdot k = \frac{p}{Q} \cdot D$，在数学上我们也可以通过一增一减两函数在函数值相同的点，其和函数取最小值找到根据)。

二、积分的经济学应用

在边际函数的讨论中，我们知道经济函数的导函数称为边际。因此，我们可以通过对边际函数进行积分来确定所需函数，这就是积分在经济学中的重要应用。

例 5　已知边际收入函数为 $R'(Q)=8(1+Q)^{-2}$，且当产出为 0 时，总收入为 0。求总收入函数。

解　总收入函数为

$$R(Q) = \int R'(Q)\mathrm{d}Q$$

$$=\int 8(1+Q)^{-2}\mathrm{d}Q=\int 8(1+Q)^{-2}\mathrm{d}(1+Q)$$

$$=-8(1+Q)^{-1}+c \quad (c\text{ 为常数})$$

因当 $Q=0$ 时，$R=0$，则 $c=8(1+0)^{-1}=8$

故：总收入函数为 $R(Q)=8-\dfrac{8}{1+Q}=\dfrac{8Q}{1+Q}$

三、微分方程在经济学中的应用

如果已知某经济函数导数的表达式中含有此经济函数(比如弹性)。例：$R'(x)=x\cdot R(x)$，我们利用积分方法直接求 $R(x)$ 是不容易的。而《微分方程》中讲述的便是这一类方程的解法，下面我们通过实例来分析。

例 6　某商品的需求量 Q 对价格 p 的弹性为 $-p\ln 3$。已知该商品最大需求额为 $p=0$ 时，$Q=1200$，求需求量对价格的函数关系。

解　根据弹性的定义有：$\dfrac{p}{Q}\cdot\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}=-p\ln 3$。我们根据微分方程的解法得其通解为：$Q=ce^{-p\ln 3}$($c$ 为常数)，由已知条件 $Q(0)=1200$ 知：$Q(0)=ce^{0}=c=1200$，于是：$Q=1200\cdot e^{(-\ln 3)p}=1200\cdot 3^{-p}$，这就是该商品的需求函数。

四、概率在产品检验和生产决策中的应用

在企业产品完工之后必须对产品进行质量检验，对产品数目较多的企业来说不可能逐件检查，而采取《概率论》中重复试验用频率逼近概率这一思想可对合格率情况进行有效地预测分析。另外，现代企业生产经常会或多或少地有风险性。因而通过各有关因素的未来状况及其发生的概率(通过往年数据归纳得来)，来计算出各个方案的期望值，并将它作为评价方案优劣的标准来进行决策。

(一) 产品检验

我们通过采集的样本中次品所占的比例在数学中称为这一事件的频率。我们需要解决的是如何使这个观测值客观地反映总体(全部产品)的合格率。

例7 现在有一批完工产品1000只，在任意抽检10只中发现有5只是次品。现在规定1000只为一批，合格批中次品数不能超过10只，否则用户将退货，试分析上述产品是否合格?

我们假设这批产品是合格的，那么根据规定，10只产品中次品超过1只的可能性很小，当然出现5只次品可能性更小，但这种小概率事件发生了，我们有理由怀疑这批产品的合格性。自然，以上判断有可能是错误的，因为频率不是概率，但这种情况的可能性是非常小的。而在实际问题中，我们可以通过多次采集样本，根据数学中平均值思想求其平均值，以尽量使结果更接近代表客观性的概率，使因误检带来的企业与用户的损失减少到最低限度。

(二) 生产决策

我们以筹资决策来介绍概率的应用。

在经济学中，如果企业资金有借入成分，需将年终利润率换算为自有资金利润率 δ，公式为 $\delta=$投资利润率$+\dfrac{\text{借入资金}}{\text{自有资金}}$(投资利润率一借入资金利息率)，以真实反映企业盈利能力。

例8 假设某企业历年经济状况如表1，企业资金总额为100万元，今年预计获得17万元，试分析借入资金：自有资金比例为0，1：4，1：1时，哪种筹资方式最佳(借入利息率分别为12%、17%)

表1

经济状况	概　率	利润额(万元)	利润率(%)
较好	0.4	25	25
一般	0.4	15	15
较差	0.2	5	5

* 本表格数据由往年数据归纳来。

于是后两种情况下，企业利润组成有所变化。

表 2

经济状况	概　率	利润总额（万元）	利息支出（万元）	自有资金		
				资金额	利　润	利润率
较好	0.4	25	2.4	80	22.60	28.25%
一般	0.4	15	2.4	80	12.60	15.75%
较差	0.2	5	2.4	80	2.60	3.25%

表 3

经济状况	概　率	利润总额（万元）	利息支出（万元）	自有资金		
				资金额	利　润	利润率
较好	0.4	25	8.5	50	16.5	33%
一般	0.4	15	8.5	50	6.5	13%
较差	0.2	5	8.5	50	−3.5	−7%

(1) 全部资金为自有资金时，利润率均值：$E\zeta_1 = 0.4\times25\% + 0.4\times15\% + 0.2\times5\% = 17\%$，自有资金利润率为 $\delta_1 = E\zeta = 17\%$，标准差 $D\zeta = [(25\% - 17\%)^2\times0.4 + (15\% - 17\%)^2\times0.4 + (5\% - 17\%)^2\times0.2]^{\frac{1}{2}} = 7.48\%$

(2) 比例为 1∶4 时，同样 $E\zeta_2 = 17\%$，$\delta_2 = 18.25\%$，$D\zeta_2 = 9.35\%$

(3) 比例为 1∶1 时，$E\zeta_3 = 17\%$，$\delta_3 = 17.00\%$，$D\zeta_3 = 14.34\%$

可以看出，期望全部资金利润率高于借入资金利息率时，期望自有资金利润率会提高，如(2)；反之，期望自有资金利润率会降低，投资风险也会增大($D\zeta_3 > D\zeta_2$)。于是企业在筹措资金时应根据企业经营状况综合分析，以减少企业投资风险，提高企业盈利能力。

五、统计思想的经济学应用

在实际经营业务时，许多量之间存在某种密切联系。根据数理统计原理，可以通过往年资料或市场信息来通过线性回归分析的方法确定各量间关系，在此基础上进行预测分析。其具体步骤为建立回归方程，通过统计数据确定未知系数的值，进行预测分析。我们以一元线性回归分析为例探讨一下。

一元线性回归方程为 $Y=a+bx$、Σx、Σy，Σx^2，Σxy 为观测数据相应和，于是可以解得

$$a=\frac{\Sigma x^2\cdot\Sigma y-\Sigma x\cdot\Sigma xy}{n\Sigma x^2-(\Sigma x)^2},\quad b=\frac{n\Sigma xy-\Sigma x\Sigma y}{n\Sigma x^2-(\Sigma x)^2}$$

式中，n 为数据个数。

例 9　已知某产品从 1989 年销售实绩 y_i 为 20、14、27、19、30，用一元线性回归法预测 1994 年、1995 年销售额。

解　以 x 为时间序列，适当取值使 $\Sigma x=0$，(x 取 $-2,-1,0,1,2$)使 a、b 公式简化，则 $\Sigma x=0$，$\Sigma y=110$，$\Sigma xy=25$，$\Sigma x^2=10$，则由公式得：$a=22$，$b=2.5$

回归方程为 $y=22+2.5x$，而 1994、1995 年对应时间为 3、4，则 $y_{1994}=22+3\times2.5=29.5$(万元)；$y_{1995}=22+4\times2.5=32$(万元)，故预测销售额为 29.5 万元，32 万元。

当然实际工作中会有 2 元、3 元情况，可以用同样方法来进行经济预测。

六、运筹学的经济学应用

运筹学应用主要体现在线性规划法进行最优决策上。线性规划是根据运筹学的原理对具有线性联系的极值问题进行求解而确定最优方案的决策方法。在有若干约束条件的情况下，这种方法能够帮助管理人员对合理组织人力、物力作出最优决策，使企业资源最优配置，获得最大利润，提高企业经济效益。

从运筹学知道，线性规划问题描述如下：

$$\max(\text{或} \min)Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

式中，Z 为目标函数；$c_i, a_{ij}, b_{ij}(i=1,2,\cdots,n; j=1,2,\cdots,n)$ 为常数；$x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为决策变量。

例 10　某工厂计划生产三种产品 A、B、C，生产所需劳动力，原料及所得利润如下表。工厂每天只能提供 200kg 原料，150 工时劳动力，在这两个条件下，如何安排生产使利润最高？

产　　品	A	B	C
单位产品所需劳动力(h)	7	3	6
单位产品所需原料(kg)	4	4	5
单位产品所获利润(元)	4	2	3

解　设 x_1, x_2, x_3 为产品 A、B、C 的日产量，Z 为总利润，则问题变为

$$\max Z = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 7x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leqslant 150 \\ 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leqslant 120 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

根据单纯型法可以解得：可行解为 $X=(0,30,0,150,0)$，于是：只安排 B 产品生产可使利润最大为 $Z=60$(元)。

在实际问题中，随市场供求变化，以上信息会发生变化，企业根据变化信息及时调整产品结构，以使企业实现最大利润，满足市场经济的需要，为企业的发展创造有利的环境和条件。

参考文献

[1] [日]小林龙一著．运筹学概论．何之杰译．北京：国防工业出版社，1985

[2] 于忠文主编．高等数学．济南：山东大学出版社，1992．

[评析]

1．选题内容

《经济问题中的数学方法》这篇毕业论文，属于数学应用论文范畴。

数学应用于经济和管理，解决经济实际问题，促进经济建设和经济发展具有重大意义，也是当前和今后研究的重大课题，热点问题。

作者能运用所学的数学分析、概率论和数理统计、微分方程等专业课理论知识，解决经济上的问题，内容涉及到经济学术语和原理、经济数学、运筹学等广泛的知识领域。

作者专业基础理论知识扎实，具有自学和研究能力。能从课外的边缘学科选题，并结合典型的经济模型和实际问题，分析高等数学思想方法在经济问题中的具体应用，揭示出解决复杂经济问题的数学思想方法及其市场经济的意义。

作者选题方向、选题内容好，符合毕业论文的选题原则和选题要求。

2．题目确定

由于作者选题内容广泛：导数的经济学应用；积分的经济学应用；微分方程在经济学中的应用；概率在产品检验和生产决策中的应用；统计思想的经济学应用。作者针对上述内容面广、用到的数学工具多，确定以《经济问题中的数学方法》为论文题目，这个题目确切，能反映出论文主旨和内容深度、范围，也便于展开写。

根据论文内容，原题目《高等数学在经济上的几点应用》太一般化了，把原题目修改为《经济问题中的数学方法》，其分段标题也适当改的小一点，显得论文题目更贴切，更富有“文学”性了。

3. 撰写新意

作者不仅选题内容丰富，而且在论述、分析、归纳过程中，有自己的独立新见解，有创作新意。主要体现在：

(1) 能从专业课以外的其他学科里选题，并利用自己学过的专业课的理论和方法解决某些有理论意义或实际意义的经济问题；

(2) 作者能将多学科的知识相互渗透，用自己的话分析、论述、例解有新特点。

论文的结构、写作技法，符合毕业论文写作要求。

4. 评析建议

综上所述，《经济问题中的数学方法》是一篇优秀毕业论文。

作者专业理论知识扎实，自学、钻研能力强。论文内容选择应再集中一些，如利用已有的模型解决经济中的问题，或建立模型，这样，不仅能确定出好题目，而且论文的水平会更高。

例文 4

一类微分方程建模探讨

数学系 94 本　董晓宁

摘　要　大学教材中，涉及微分方程实际应用的内容极少提及，本文针对一类含有瞬时变化率的问题，探讨了如何通过建立微分方程模型来解决此类实际问题。

关键词　瞬时变化率　数学模型　建模微分方程模型　微元分析法

一、问题的提出

在实际生活中，常遇到这种问题，即需要知道两个变量之间的关系式或一个变量随另一个变量变化的规律。先看下面的例子。

例 1　某人的食量是 10467 焦/天(J/d)，其中 5038J/d 用于基本的新陈代谢(即自动消耗)。在健身训练中，他所消耗的热量大约是 69J/(kg·d)乘以他的体重(kg)，假设以脂肪形式贮藏的热量 100%的有效，而 1kg 脂肪含热量 41868J，试研究此人的体重随时间变化的规律。

［分析］　题目中虽没有“导数”这样的关键词出现，但我们可以把视线移到最后的问题上，如果把体重 W 看作关于时间 t 的连续函数，我们就能找到一个含 $\frac{dW}{dt}$ 的微分方程，并以此来表示关于 $W(t)$ 的瞬间关系。

例 2　一个星期天，某人驾车在正午时分离开 A 处，下午 3：20 分到达 B 处。如速度计所指出的那样，他从静止开始均匀地加速，当他到达 B 处时，速度为 60 公里/小时(km/h)，问从 A 到 B 有多远？

［分析］　由题目所给的条件，速度计读数均匀增加意味着车速是时间的线性连续函数，而速度又是距离关于时间的导数，于是可以得到 $\frac{dS}{dt}=at+b$

例 3　细菌的增长率与总数成正比，如果细菌总数在 24h 内由 100 增长为 400，那么，前 12h 后总数是多少？

［分析］　第一句话说的是任何瞬间都成立的事实，第二句则给出了特定瞬间的信息，如果我们用 $y(t)$ 表示总数，则 $\frac{dy}{dt}=ky$。

我们不难发现，上述三个例题有一个共同特征，即题目中都直接给出或隐含有瞬时变化率的信息，而用微分方程则可以很好地描述出这一特征，因此，可通过建立微分方程模型来解决。此类问

题在实际生活中还有很多，如物理学中的“速率”问题，经济学中的“边际”问题等。

二、建立微分方程模型

1. 数学模型

数学模型可以描述为对于现实世界的一个特定的对象，为了一个特定的目的，根据特有的内在规律，做出一些必要的简化假设，运用适当的数学工具，得到的一个数学结构。具体说来，数学模型就是为了某种目的，用字母、数字及其他数学符号建立起来的等式或不等式以及图表、图像、框图、程序等来描述客观事物的特征及其关系。

数学模型有两个特点：其一，它是一种纯关系结构，是经过数学抽象扬弃了一切与关系无本质联系的属性后的系统；其二，这种结构是用数学概念和数学符号来描述的。

特制问题和对象的多样性，带来了数学模型的多样性。对一个较复杂的客体对象抽象出来的数学模型，往往不是单一类型的，而是一种复合型的模型。

2. 微分方程模型

在前面例题中我们已经分析过，当描述实际对象的某些特性随时间(或空间)而演变的过程，分析它的变化规律时，亦即问题中含有瞬时变化率因素时，通常可以通过建立微分方程模型来解决。微分方程是用机理分析方法研究此类问题的重要工具。一般数学模型建立的要求和步骤对它同样适用，而“变化率”的假设与推导是建立微分方程模型的关键。

(1) 建立微分方程模型常用的方法

① 微元分析法

自然界中有许多现象满足的规律是通过变量的微元之间的关系来表达的。对于这类问题我们不能直接列出自变量和未知函数及变化率之间的关系式，而是通过微元分析法，利用已知的规律建

立一些度量(自变量与未知函数)的微元之间的关系式,然后再通过取极限的方法得到微分方程。

如例 1,体重的变化/天$=\frac{\Delta W}{\Delta t}$(kg/d),令 $\Delta t\to 0$,则得到$\frac{dW}{dt}=\frac{(2500-1200)-16W}{10000}$,于是一个一阶常微分方程建立起来了。下面只要利用所给初始条件,即可求出体重随时间变化的规律(过程略):

$$W=\frac{1300}{16}-\left(\frac{1300-16W_0}{16}\right)\exp(-16t/10000)$$

② 按变化规律直接列方程

即利用人们熟悉的力学、数学、物理、化学等学科中的规律,如牛顿第二定律、放射性物质的放射规律等,对某些实际问题直接列出微分方程,如例 2、例 3。

③ 模拟近似法

在生物、经济等学科中,许多现象所满足的规律并不很清楚,而且现象也相当复杂,因而需要根据大量的实际资料或实验数据,提出各种假设。在一定的假设下,给出实际现象所满足的规律,然后用适当的数学方法列出微分方程。

在实际建模过程中,上述方法往往是综合应用,不论应用哪一种方法,通常要根据实际情况,作出一定的假设与简化,并要把模型的理论或计算结果与实际情况进行对照检验,以修改模型使之更准确地描述实际问题并进而达到预报预测的目的。

(2) 建立微分方程模型的若干准则(以微元分析法为例)

这些准则实际上也是描述了一阶微分方程模型的建模步骤。因为问题最终是为了找到微分方程的一条解曲线,所以如果你知道了曲线上每一点的导数以及它的起始点,那么你就能构造出这条解曲线。这几条准则如下:

① 翻译,也称转化。这一步要完成的是把实际问题中出现的表示“导数”的常用词(如“速率”、“衰变”、“边际”等)找出来,并用

导数加以表示。

注意：不少问题都遵循下面的模式：

$$净变化率 = 输入率 - 输出率$$

如果能够理解这个模式，那么所需的微分方程就近在咫尺了。

② 建立瞬时表达式。微分方程是一个在任何时刻都必须正确的瞬时表达式，这是数学问题的核心，因此，找到了表示"导数"的关键词后，这一步要根据自变量有微小改变 Δt 时因变量的增量 Δy，建立起 Δt 时段上的增量表达式，令 $\Delta t \to 0$，即可得到 dy/dt 的表达式，从而构造出微分方程。

③ 配备物理单位。在建模中应注意每一项采用同样的物理单位。

④ 叙述给定的条件。这些条件独立于微分方程而成立，是关于系统在某一特定时刻或边界上的信息。在解出方程后，利用它们来确定有关的常数(如比例系数等)，为了完整充分地给出问题的数学陈述，应将这些给定的条件和微分方程一起写出。

⑤ 写出清楚框架，在着手研究一个问题时，一个好的方式就是写出你所知道的有关这个问题的每一件事，用框框、黑点或其他符号标出关键语句或主要步骤(在下文例题中，将以"·"标出关键语句)这些步骤的全体叫做框架。比如在一个典型问题中，当你依次得到下面这些结果时，关键步骤就完成了：

- 把用语言叙述的情况概念化为文字方程；
- 陈述出所涉及的原则或物理定律；
- 微分方程；
- 给定的各种条件，包括初始条件或其他条件；
- 微分方程的解；
- 求出常数的值；
- 问题的答案。

框架已建立，在问题中每一步的目的就是为了完成框架中下一步要做的事。

有关解决微分方程实际应用题的一般原则就是这些，要得到更多的对解题过程的感性认识，下来来解决几个问题。

三、典型例题

1. 某人的食量是10467J/d，其中5038J/d用于基本的新陈代谢（即自动消耗），在健身训练中，他所消耗的热量大约是69J/(kg·d)乘以他的体重(kg)，假设以脂肪形式贮藏的热量100%的有效，而1kg脂肪含热量41868J，试研究此人的体重随时间变化的规律。

这是前面分析过的例1，下面用微分方程建模的方法给出它的详细解答。

解 问题中所涉及的时间仅仅是"每天"，因此对"每天"：

$$\text{体重的变化} = \text{输入} - \text{输出}$$

其中，输入是扣除了基本新陈代谢之外的净重量吸收；输出就是进行健身训练中的消耗(WPE)。

由于考虑的是导数，上面的陈述可以合并为更好的概念性陈述：

· 体重的变化/每天＝净吸收量/每天－WPE/每天

而净吸收量/每天＝10467(J/d)－5038(J/d)

＝5429(J/d)

净输出量/每天＝69(J/(kg·d))×W(kg)

＝69W(J/d)

体重的变化/每天＝$\dfrac{\Delta W}{\Delta t}$(kg/d)

$\xrightarrow[\Delta t\to 0]{}$ $\mathrm{d}W/\mathrm{d}t$

上面的瞬时关系式，有些量以能量(J)的形式给出，有些量以重量(kg)的形式给出，考虑单位的匹配，利用

$$\text{千克}/\text{天} = \text{净焦}/\text{天}/41868\text{J/kg}$$

代入数据得到

• $dW/dt=\dfrac{(2500-1200)-16W}{10000}$

这个式子可用物理单位检验如下

$$千克/天=\frac{焦/天-(焦/千克\cdot天)\cdot千克}{焦/千克}$$

上述微分方程是一阶线性的，答案中有一个积分常数，因此给出一个定解条件：

• $W|_{t=0}=W_0$（一天开始时他的体重为 W_0）

至此该问题的微分方程模型已建立，下面用分离变量法求解：

$$\frac{dW}{1300-16W}=\frac{dt}{10000},$$

$$-\frac{1}{16}\ln|1300-16W|=\frac{t}{10000}+c$$

利用初始条件，$c=-\dfrac{1}{16}\ln|1300-16W_0|$

从而 $|1300-16W|=|1300-16W_0|\exp(-16t/10000)$

因为指数因子为正，所以 $(1300-16W)$ 与 $(1300-16W_0)$ 同号，故可去掉绝对值符号，得

$$1300-16W=(1300-16W_0)\exp(-16t/10000)$$

解出 W

• $W=\dfrac{1600}{16}-\left(\dfrac{1600-16W_0}{16}\right)\exp(-16t/10000) \qquad (1)$

显然，由 $t\to\infty$ 时，体重有稳定值

$$W_{平衡}=\frac{1300}{16}(\text{kg})=81.25(\text{kg})$$

则式(1)即描述了该人体重随时间变化的规律。

2. 在一个巴基斯坦洞穴里，发现了具有古代尼安德时人特征的人骨碎片，科学家们把它们带到实验室，作碳 14 年代测定，分析表明，C^{14} 与 C^{12} 的比例仅仅是活体组织内的 6.24%%，此人生活在多少年前？

（C^{14} 年代测定：活体中的碳有一小部分是放射性同位素 C^{14}，

这种放射性碳是由于宇宙射线在高层大气中的撞击引起的，经过一系列交换过程进入活体组织中，直到在生物体中达到平衡浓度。这意味着在活体中C^{14}的数量与稳定的C^{12}的数量成正比。生物体死后，交换过程就停止了。放射性碳便以每年八千分之一的速度减少。)

解　我们的实际问题是："这人死去多久？"

若设：t=死后年数

$$y(t)=\frac{C^{14}}{C^{12}} \qquad \left(如\frac{mC^{14}}{mC^{12}}\right)$$

由生物死后C^{14}是$\frac{1}{8000}$/年的速度减少，则

$$dy/dt=-\frac{y}{8000}(yr)$$

此为一阶微分方程，积分后有一常数，故给出定解条件：

$y|_{t=0}=y_0$，即活体中C^{14}的比例

通解为：$y=ke^{-t/8000}$

利用初始条件，得$k=y_0$　故

$$y=y_0e^{-t/8000}$$

问题要求　$y=0.0624y_0$时的t。

$$\therefore 0.0624y_0=y_0e^{-t/8000}$$

$$t=-8000\ln 0.0624\approx 22400yr$$

这就是此人的死亡年数。

3. 一滴球形雨滴，以与它的表面积成比例的速度蒸发。求其体积V关于时间的函数式。

解　设雨滴的半径为$r(t)$，则

表面积为$S=4\pi r^2$，　体积为$V=\frac{4}{3}\pi r^3$，

由体积分式

$$r=\left(\frac{3}{4\pi}V\right)^{1/3}$$

把表面积转化为体积表达式

$$S=4\pi\cdot\left(\frac{3}{4\pi}V^{1/3}\right)^2=\frac{9}{4\pi}V^{2/3}$$

由问题知，雨滴以与表面积成比例的速度蒸发，求体积关于时间 t 的函数式，得

$$\cdot\ dV/dt=-lS=-\frac{9}{4\pi}lV^{2/3}\quad(l\ \text{为比例常数})$$

$$\text{令}\quad -\frac{9}{4\pi}l=k,\text{得}$$

$$\cdot\ dV/dt=-kV^{2/3}\ (\text{负号表示减少})$$

这是一个一阶常微分方程，有一个定解条件

$$\cdot\ V|_{t=0}=V_0,$$

至此，微分方程模型已建立。

用分离变量法求解，得通解为

$$\cdot\ V=[(-kt+c)/3]^3$$

利用初始条件，得 $c=3V_0^{1/3}$

代入通解得

$$\cdot\ V=\left(-\frac{k}{3}t+V_0^{1/3}\right)^3$$

此即为雨滴体积关于时间的函数式。

参考文献

[1] Lucas W F 著．微分方程模型．合肥：中国科技大学出版社，1992.

[2] 姜启源编．数学模型．北京：高等教育出版社，1993.

[3] 齐欢编．数学模型方法．武汉：华中理工大学出版社，1992.

[评析]

1．选题内容

《一类微分方程建模探讨》这篇毕业论文，属于数学应用论文范畴。

微分方程建模可分为动态模型和稳定状态模型。作者选择了

前者，并针对常微分方程教材中涉及实际应用问题极少的情形，选择了一类含有瞬时变化率的问题，探讨如何通过建立微分方程模型来解决这一类的实际问题，从而通过分析、归纳，揭示此类微分方程建模的思想方法。

作者专业基础理论知识扎实，具有自学和研究能力。能从教材涉及内容少的领域内，选择教学难点为选题，选题内容好，符合毕业论文选题原则和选题要求。

2. 题目确定

微分方程建模内容十分广泛，利用已有的模型解决实际问题或对复杂的实际问题建立数学模型不是一件容易的事，难度都很大，欲确定一个好题目也是困难的。对此，作者根据上述选题内容及论文主旨，确定以《一类微分方程建模探讨》为论文题目。这个题目适中、确切，能反映出论文主旨和内容深度、范围，便于展开写。

3. 撰写新意

作者不仅选题内容集中，论文题目适中，而且在分析、归纳过程中，有自己独立的见解，有创作新意。主要体现在：

(1) 能从教材被忽视的地方选题；

(2) 作者能从大量资料中，巧妙地只选择了含"变化率"的一类实际问题，由问题的提出，通过对实例的具体分析、探讨，很自然地归纳、揭示出"一类微分方程建模"的思想和方法。

论文语言通俗易懂，论文结构、写作技法符合毕业论文写作要求。

4. 评析建议

综上所述，《一类微分方程建模探讨》是一篇优秀毕业论文。作者专业理论知识扎实，自学、钻研能力强，写作基础好，若在选题内容上下功夫，论文的水平会更高，会达到一定的深度。

参考文献

[1] 王梓坤．今日数学及其应用．中国科学报．1993,(10)

[2] 严士健．面向21世纪中国数学教育改革．刊于刘兼主编的《21世纪中国数学教育展望》第二册第18页、北京:北京师范大学出版社,1995.

[3] 姚远、郑进保、张惠民、汪季贤主编．科技学术期刊撰写指南．北京:光明日报出版社,1988.

[4] 国家教委师范司编著　普通高等师范学校数学教育专业(本科)教育教学基本要求(试行)．北京、首都师范大学出版社,1994.

[5] 王卿文,杨家骐．"矩阵特征多项式的一种求法"的一个注记．数学通报．1992,(6)

[6] 章建跃．略论启发式数学教学的基本要求．数学通报．1992,(6)

[7] 孙书荣,韩振来．积分运算中应注意的几个问题．济南大学学报．1992,(6).

[8] 王姗姗．二维随机变量概率分布的求解方法．节选于于忠文主编的《概率与数理统计》而编写．北京、中国商业出版社．1990.

[9] 李师正．完备向量格中凸集分离定理．数学年刊,1992,(23)

[10] 李师正．Hamilton半群的结构．纯粹数学与应用数．1993,(9)

[11] 徐利治著．数学方法论选讲．武汉:华中工学院出版社,1988.

[12] 姜启源编．数学模型．北京:高等教育出版社,1993.

[13] 孙全森．数学创造性思维的心理机制及其能力的培养．山东教育科研．1997,(3)

[14] 陈景寅．数学美是探奥的美．山东师范大学学报　1995,(增刊)

[15] 邵品琮　一类条件极值问题的处理．刊于沈燮昌,邵品琮著的《数学分析纵横谈》．北京:北京大学出版社,1991.

[16] 王长钰,赵庆祯,韦志敏,张云翔,王长江,王旭文等．系统工程与实践．1985,(3)

国内主要数学刊物名录

大学学报(自然科学报)

刊名	地址
北京大学学报	北京市．北京大学学报编辑部
清华大学学报	北京市．清华大学学报编辑部
北京师范大学学报	北京市．北京师范大学学报编辑部
首都师范大学学报	北京市．首都师范大学学报编辑部
北京工业大学学报	北京市．北京工业大学学报编辑部
复旦大学学报	上海市．复旦大学学报编辑部
华东师范大学学报	上海市．华东师范大学学报编辑部
同济大学学报	上海市．同济大学学报编辑部
上海交通大学学报	上海市．上海交通大学学报编辑部
华东理工大学学报	南京市．华东理工大学学报编辑部
天津大学学报	天津市．天津大学学报编辑部
南开大学学报	天津市．南开大学学报编辑部
天津师范大学学报	天津市．天津师范大学学报编辑部
大连理工大学学报	大连市．大连理工大学学报编辑部
辽宁师范大学学报	大连市．辽宁师范大学学报编辑部
东北大学学报	沈阳市．东北大学学报编辑部
沈阳工业大学学报	沈阳市．沈阳工业大学学报编辑部
吉林大学自然科学学报	长春市．吉林大学自然科学学报编辑部
东北师范大学学报	长春市．东北师范大学学报编辑部

吉林工业大学学报　　长春市，吉林工业大学学报编辑部
延边大学学报　　吉林延吉市，延边大学学报编辑部
哈尔滨工业大学学报　　哈尔滨市，哈尔滨工业大学学报编辑
哈尔滨工程大学学报　　哈尔滨市，哈尔滨工程大学学报编辑部
哈尔滨科学技术大学学报　　哈尔滨市，哈尔滨科技大学学报编辑
哈尔滨师范大学学报　　哈尔滨市，哈尔滨师范大学学报编辑部
内蒙古大学学报　　呼和浩特市，内蒙古大学学报编辑部
内蒙古师范大学学报　　呼和浩特市，内蒙古师范大学学报编辑部
河北大学学报　　保定市，河北大学学报编辑部
河北师范大学学报　　石家庄市，河北师范大学学报编辑部
山西大学学报　　太原市，山西大学学报编辑部
太原工业大学学报　　太原市，太原工业大学学报编辑部
西北大学学报　　西安市，西北大学学报编辑部
西安交通大学学报　　西安市，西安交通大学学报编辑部
陕西师范大学学报　　西安市，陕西师范大学学报编辑部
延安大学学报　　延安市，延安大学学报编辑部
西北师范大学学报　　兰州市，西北师范大学学报编辑部
兰州大学学报　　兰州市，兰州大学学报编辑部
新疆大学学报　　乌鲁木齐市，新疆大学学报编辑部
中国科学技术大学学报　　合肥市，中国科技大学学报编辑部
安徽大学学报　　合肥市，安徽大学学报编辑部
安徽师范大学学报　　芜湖市，安徽师范大学学报编辑部
南京大学学报　　南京市，南京大学学报编辑部
南京师范大学学报　　南京市，南京师范大学学报编辑部

河海大学学报	南京市．河海大学学报编辑部
中国矿业大学学报	徐州市．中国矿业大学学报编辑部
江苏理工大学学报	镇江市．江苏理工大学学报编辑部
苏州大学学报	苏州市．苏州大学学报编辑部
新浙江大学学报	杭州市．新浙江大学学报编辑部
浙江师范大学学报	金华市．浙江师范大学学报编辑部
厦门大学学报	厦门市．厦门大学学报编辑部
福州大学学报	福州市．福州大学学报编辑部
福州师范大学学报	福州市．福州师范大学学报编辑部
华侨大学学报	泉州市．泉州华侨大学学报编辑部
郑州大学学报	郑州市．郑州大学学报编辑部
河南大学学报	开封市．河南大学学报编辑部
河南师范大学学报	新乡市．河南师范大学学报编辑部
武汉大学学报	武汉市．武汉大学学报编辑部
华中理工大学学报	武汉市．华中理工大学学报编辑部
华中师范大学学报	武汉市．华中师范大学学报编辑部
湖北大学学报	武汉市．湖北大学学报编辑部
湖南大学学报	长沙市．湖南大学学报编辑部
湘潭大学学报	湘潭市．湘潭大学学报编辑部
湖南师范大学自然科学学报	长沙市．湖南师范大学自然科学学报编辑部
国防科技大学学报	长沙市．国防科技大学学报编辑部
山东大学学报	济南市．山东大学学报编辑部
山东师范大学学报	济南市．山东师范大学学报编辑部
曲阜师范大学学报	曲阜市．曲阜师范大学学报编辑部
青岛海洋大学学报	青岛市．青岛海洋大学学报编辑部
山东工业大学学报	济南市．山东工业大学学报编辑部
青岛大学学报	青岛市．青岛大学学报编辑部
济南大学学报	济南市．济南大学学报编辑部

南昌大学学报	南昌市．南昌大学学报编辑部
江西师范大学学报	南昌市．江西师范大学学报编辑部
中山大学学报	广州市．中山大学学报编辑部
汕头大学学报	汕头市．汕头大学学报编辑部
华南师范大学学报	广州市．华南师范大学学报编辑部
广西大学学报	南宁市．广西大学学报编辑部
广西师范大学学报	南宁市．广西师范大学学报编辑部
成都科技大学学报	成都市．成都科技大学学报编辑部
四川大学学报	成都市．四川大学学报编辑部
四川师范大学学报	成都市．四川师范大学学报编辑部
重庆大学学报	重庆市．重庆大学学报编辑部
云南大学学报	昆明市．云南大学学报编辑部
云南师范大学学报	昆明市．云南师范大学学报编辑部
贵州大学学报	贵阳市．贵州大学学报编辑部
贵州师范大学学报	贵阳市．贵州师范大学学报编辑部
宁夏大学学报	银川市．宁夏大学学报编辑部

专业数学期刊

刊　名	地　址
数学学报	北京市．中关村中科院数学研究所
数学进展	北京市．北京大学数学系《数学进展》编辑部
数学年刊	上海市．复旦大学数学研究所
数学季刊	开封市．河南大学《数学季刊》编辑部
数学的实践与认识	北京市．中关村中科院系统科学研究所
数学研究	厦门市．厦门大学数学研究所

数学译林	北京市．中科院数学研究所
数学研究与评论	大连市．大连理工大学数学科学研究所
东北数学	长春市．吉林大学数学研究所
模糊数学	武汉市．华中理工大学内
计算数学	北京市．中关村计算中心
中国数学文摘	北京市．中关村中科院南路 8 号
高等数学计算数学报	南京市．南京大学数学系
应用数学学报	北京市．友谊宾馆 19 单元
高校应用数学学报	杭州市．浙江大学内
应用数学	武汉市．华中理工大学内
应用数学和力学	重庆市．重庆大学内
纯粹数学与应用数学	西安市．西北大学数学系
应用概率统计	上海市．华东师范大学数理统计系
数理统计与应用概率	北京市．北京理工大学应用数学系
数理统计与管理	北京市．玉泉路 19 号中科院研究生院内
控制与决策	沈阳市．东北大学 125 信箱
统计学、经济数学与方法	北京市．张自忠路 3 号
工程数学学报	西安市．西安交通大学内
生物数学学报	合肥市．安徽农业大学 632 信箱
中国科学 A 辑	北京市．东黄城根北街 16 号
科学通报	北京市．东黄城根北街 16 号
系统科学与数学	北京市．中科院系统科学研究所
系统工程理论与实践	北京市．中科院系统科学研究所
数量经济技术经济研究	北京市．中科院数量经济技术经济研究所
数学物理学报	武汉市．武汉数学物理研究所
天文学报	南京市．北京西路 2 号

力学学报	北京市．中关村中科院力学研究所
计算结构力学与实践	大连市．大连理工大学内
信息与控制	沈阳市．中科院沈阳自动化研究所
控制理论与应用	广州市．华南理工大学中科院系统科学研究所
系统工程	长沙市．展览馆路6号
计算机学报	北京市．中科院计算技术研究所
计算机科学	重庆市．渝中区胜利路132号
计算机应用软件	上海市．计算技术研究所
数值计算与计算机应用	北京市．2719信箱
微机应用	北京市．中关村路17号
计算机应用文摘	重庆市．市中区胜利路132号

中等数学期刊

刊　名	地　址
数学通报	北京市．北京师范大学《数学通报》编辑部
数学教学	上海市．华东师范大学数学系
中学生数学	北京市．首都教师范大学数学系
中学数学研究	广州市．华南师范大学数学系
数学通讯	武汉市．华中师范大学《数学通讯》编辑部
中学数学杂志	曲阜市．曲阜师范大学《中学数学杂志》编辑部
数学教学通讯	重庆市．西南师范大学数学系
初中数学教与学	扬州市．扬州大学师范学院《初中数学教与学》编辑部

中学生理科应试	哈尔滨市．哈尔滨师范大学《中学生理科应试》编辑部
数学教学研究	兰州市．西北师范大学数学系
中学数学教学	合肥市．安徽教育学院
教学与教材研究	北京市．国家教育部教育司《教学与教材研究》编辑部
教学与研究	北京市．中国人民大学《教学与研究》编辑部
教育科学	大连市．辽宁师范大学《教育科学》编辑部
课程、教材、教法	北京市．沙滩后街55号
教育理论与实践	太原市．山西教育科学研究所
教学研究	哈尔滨市．中央大街1号
教育评论	福州市．福建省教育科学研究所
高等教育研究	武汉市．华中理工大学《高等教育研究》编辑部
中国高等教育	北京市．海淀区文慧园北路10号
教育研究	北京市．中央教育科学研究所
自然科学史研究	北京市．朝阳门内大街137号
自然辩证法通讯	北京市．中科院自然辩证法通讯杂志社，北京3908信箱
自然辩证法研究	北京市．海淀区学院南路86号
外国教育资料	上海市．华东师范大学比较教育研究所
教师博览	南昌市．洪都北大街16号